Ne soyez pas avares de mots : détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Une seule feuille de notes recto-verso autorisée. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

(a) Donner un exemple de bijection de l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ vers lui même, autre que la fonction identité.

(b) Donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Z}$.

(c) L'ensemble des nombres pairs est-il dénombrable ? Justifier.

Question 2

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

(a) La fonction, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$;

(b) La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n(n+9)$;

(c) La fonction $\cos(x)$ des réels vers les réels.

Question 3

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,3), (2,2), (3,2), (3,3)\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{(0,1), (0,3), (1,0), (1,2), (2,1), (2,3), (3,0), (3,2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 4

On considère la relation $\blacktriangle$ sur $\left(\mathbb{N}^+\right)^2$ (les paires d'entiers positifs) définie par

$$(a,b) \blacktriangle (c,d) \quad \text{ssi} \quad ad = bc.$$

(a) La relation $\blacktriangle$ est-elle réflexive, symétrique, transitive, anti-symétrique ?

(b) Décrire la classe d'équivalence de $(1,1)$.

Question 5

Prouver que

(a) $(r \to r) \to r \equiv r$;

(b) $((r \to r) \to r) \to r$ est une tautologie.

Question 6

Mettre la formule suivante en forme normale prénexe

$$\neg \forall y. \Big(\big(\exists x. R(x,y)\big) \to \big(\forall x. P(x,y)\big) \Big).$$

Question 7

Écrire une formule équivalente à « 2 est un nombre premier » dans le calcul des prédicats avec signature $+, \times, =, 0, 1, \ldots$.