Ne soyez pas avares de mots : détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Poser la multiplication suivante en base 3 :

$$2022 \times 12.$$

Question 2

Effectuer les conversions suivantes

(a) $(4A7)_{16}$ en base 2.

(b) $(6463)_8$ en base 16.

Question 3

Soient a et b deux nombres qui s'écrivent, respectivement, avec n et m chiffres binaires. Combien de chiffres binaires faut-il au plus pour représenter $a + b$? Et $a \times b$?

Question 4

Prouver que

$$q \to (p \to r) \ \models\ (q \wedge p) \to r.$$

Question 5

En utilisant les règles de la déduction naturelle, écrire la preuve formelle de

$$r \ \vdash\ p \to (p \wedge r).$$

Question 6

Mettre la formule suivante en forme normale prénexe

$$\neg\exists y.\Big(\big(\forall x.Q(x, y)\big) \wedge \neg\big(\forall x.R(x, y)\big)\Big).$$

Question 7

En utilisant exclusivement les symboles $+, -, \times, /, =, \leq$, les constantes $0, 1, 2, \ldots$ et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l'affirmation « 0 n'a pas d'inverse ».

Solutions

Solution 1

$$\begin{array}{cccccccc} & & 2 & 0 & 2 & 2 & \times \\ & & & & 1 & 2 & = \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & + \\ & 2 & 0 & 2 & 2 & & = \\ \hline 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Solution 2

(a) On convertit chaque chiffre hexadécimal en base 2 :

$$(4)_{16} = (0100)_2, \quad (A)_{16} = (1010)_2, \quad (7)_{16} = (0111)_2$$

et on concatène

$$(4A7)_{16} = (10010100111)_2.$$

(b) De la même façon, on passe d'abord par la base 2 :

$$(6)_8 = (110)_2, \quad (4)_8 = (100)_2, \quad (6)_8 = (110)_2, \quad (3)_8 = (011)_2$$

$$(6463)_8 = (110100110011)_2.$$

Ensuite on regroupe en blocs de quatre et on convertit en base 16 :

$$(1101)_2 = (D)_{16}, \quad (0011)_2 = (3)_{16}, \quad (0011)_2 = (3)_{16}$$

$$(6463)_8 = (D33)_{16}.$$

Solution 3 Si a et b s'écrivent avec n et m chiffres binaires, alors $a < 2^n$ et $b < 2^m$. Supposons que $n \geq m$, on en déduit que

$$a + b < 2^n + 2^m < 2^n + 2^n < 2^{n+1},$$

donc $a + b$ s'écrit avec au plus $n + 1$ chiffres binaires. Un raisonnement analogue vaut si $m > n$.

De la même façon, on a

$$ab < 2^n 2^m = 2^{n+m},$$

donc ab s'écrit avec au plus $n + m$ chiffres binaires.

Solution 4 Il suffit d'écrire les tables de vérité.

q	p	r	$q \to (p \to r)$	$(q \wedge p) \to r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

On remarque qu'à chaque fois que la proposition de gauche est vraie, celle de droite l'est aussi. Donc $(q \wedge p) \to r$ est bien une conséquence logique de $q \to (p \to r)$. En fait, on peut observer même plus : les deux propositions sont sémantiquement équivalentes !

Solution 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,H}{r, p \vdash p}\,W \qquad \dfrac{\dfrac{}{r \vdash r}\,H}{r, p \vdash r}\,W}{r, p \vdash p \wedge r}\,I_{\wedge}}{r \vdash p \to (p \wedge r)}\,D$$

Solution 6

$$\begin{gathered}
\neg\exists y.\Big(\big(\forall x.Q(x,y)\big) \wedge \neg\big(\forall x.R(x,y)\big)\Big) \equiv \\
\neg\exists y.\Big(\big(\forall x.Q(x,y)\big) \wedge \big(\exists x.\neg R(x,y)\big)\Big) \equiv \\
\neg\exists y.\Big(\big(\forall x.Q(x,y)\big) \wedge \big(\exists z.\neg R(z,y)\big)\Big) \equiv \\
\neg\exists y.\forall x.\exists z.\big(Q(x,y) \wedge \neg R(z,y)\big) \equiv \\
\forall y.\exists x.\forall z.\neg\big(Q(x,y) \wedge \neg R(z,y)\big) \equiv \\
\forall y.\exists x.\forall z.\big(\neg Q(x,y) \vee R(z,y)\big).
\end{gathered}$$

Solution 7 Un inverse d'un nombre a est un nombre b tel que $ab = ba = 1$. Alors une façon d'écrire la propriété « 0 n'a pas d'inverse » est :

$$\neg\exists a.(0 \times a = 1).$$