Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.
IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.
Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Donner un exemple de bijection entre les ensembles suivants

(a) L'ensemble $A = \{a, b, c, d\}$ et l'ensemble $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) L'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2.

(c) ($*$) L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels et l'ensemble de tous les mots s'écrivant avec les lettres a et b (y compris les mots qui n'ont pas de sens, par ex. : $a, aab, bbba, \dots$).

Question 2

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

(a) Le cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(b) La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2^n$,

(c) La valeur absolue, $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Question 3

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 4

Lesquelles des relations suivantes sont des relations d'équivalence ? Pour chaque relation d'équivalence dire combien de classes d'équivalence elle contient et les décrire.

(a) La relation sur les mots de la langue française constituée des paires (x, y) telles que x et y commencent par la même lettre. Par ex. : (**o**iseau, **o**urs).

(b) La relation sur les mots de la langue française constituée des paires (x, y) telles que x et y contiennent une même lettre. Par ex. : (p**h**oto, cac**h**e).

Question 5

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^{n} (5\,k - 3) = \frac{1}{2}\,(n + 1)(5\,n - 6)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 6

Donner une définition récursive de la fonction

$$f(n) = (\underbrace{11 \cdots 1}_{n \text{ fois}})_3.$$

Solutions

Solution 1

(a) La fonction qui associe $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto 2, d \mapsto 3$ est bien une bijection.

(b) La fonction $f(n) = n + 2$ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}_{\geq 2}$.

(c) Il suffit de trouver une façon d'énumérer tous les mots de deux lettres possibles dans un ordre quelconque. L'ordre alphabétique classique n'est pas le bon choix (car il y a une infinité de mots commençant par a), mais nous pouvons, par exemple, les ordonner par longueur, et ensuite alphabétiquement :

$$
\begin{array}{ll}
0 \mapsto a & 4 \mapsto ba \\
1 \mapsto b & 5 \mapsto bb \\
2 \mapsto aa & 6 \mapsto aaa \\
3 \mapsto ab & 7 \mapsto aab \\
\vdots &
\end{array}
$$

On remarque que si on remplace a par 0 et b par 1, et on ajoute un 1 à gauche, on obtient la bijection

$$
\begin{array}{ll}
0 \mapsto 10 & 4 \mapsto 110 \\
1 \mapsto 11 & 5 \mapsto 111 \\
2 \mapsto 100 & 6 \mapsto 1000 \\
3 \mapsto 101 & 7 \mapsto 1001 \\
\vdots &
\end{array}
$$

En lisant les nombres de droite en base deux, on s'aperçoit que cette bijection est à nouveau $f(n) = n + 2$.

Solution 2

(a) Le cosinus n'est ni injectif, ni surjectif en tant que fonction sur les réels. En effet, pour tout x on a $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, ce qui contredit l'injectivité. En plus, il ne prend que des valeurs comprises entre -1 et 1, ce qui contredit la surjectivité.

(b) La fonction 2^n est bien injective sur les entiers, en effet, si $2^n = 2^m$, alors nécessairement $n = m$ en prenant le logarithme à gauche et à droite. Elle n'est pas surjective, en effet 3 n'a pas d'antécédent.

(c) La valeur absolue n'est pas injective sur les entiers relatifs, en effet $|-x| = |x|$ pour tout x. Elle est surjective si on restreint son codomaine aux entiers naturels, comme c'est le cas dans la question. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre soit n, soit $-n$ comme antécédent.

Solution 3

(a) Le graphe de la relation $\mathbb{R}$ est

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[loop above] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[loop left] \arrow[rr] & & 2 \arrow[loop right] \\
 & 3 \arrow[loop below] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Elle est réflexive, transitive (il y a un chemin $0 \to 1 \to 2$, et il y a aussi le chemin $0 \to 2$), antisymétrique (il n'y a pas de doubles flèches autres que les flèches refléxives), et elle n'est pas symétrique (par exemple, il y a $(0, 2)$, mais pas $(2, 0)$).

(b) Le graphe de la relation $\mathcal{S}$ est

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[loop above] & \\ 1 \arrow[loop left] \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & 2 \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

Elle est symétrique (que des doubles flèches). Elle est ni réflexive (pas de $(2, 2)$ ni de $(3, 3)$), ni antisymétrique (on a $(1, 2)$ et $(2, 1)$, mais $1 \neq 2$), ni transitive (par exemple on a $2 \to 1 \to 2$, mais pas $2 \to 2$).

(c) Le graphe de la relation $\mathcal{T}$ est

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ 1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 2 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Elle n'est pas réflexive, ni symétrique. Il est facile de voir qu'elle est antisymétrique. Elle est aussi transitive, quoi que la vérification soit plus longue ; une façon synthétique de le voir, c'est de se rendre compte qu'il s'agit du diagramme de la relation d'*ordre stricte* $0 < 1 < 3 < 2$.

Solution 4

(a) Cette relation est une équivalence, en effet elle est réflexive, symétrique et transitive. Il y a 26 classes d'équivalence correspondantes aux 26 lettres de l'alphabet, chaque classe est composée de tous les mots commençant par une lettre donnée.

(b) Cette relation est réflexive et symétrique, mais elle n'est pas transitive (en effet, « chat » est en relation avec « bas », qui est en relation avec « bon », mais le premier n'est pas en relation avec le dernier). Elle n'est donc pas une relation d'équivalence.

Solution 5 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}(5k-3) = 5n+2+\sum_{k=0}^{n}(5k-3) = 5n+2+\frac{5}{2}n^2-\frac{1}{2}n-3 = \frac{5}{2}n^2+\frac{9}{2}n-1 = \frac{1}{2}(n+2)(5n-1).$$

Solution 6 On sait que par définition

$$f(n) = (\underbrace{11\cdots1}_{n \text{ fois}})_3 = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{3^n-1}{2}.$$

De la deuxième égalité on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(n) &= f(n-1) + 3^n. \end{aligned}$$

Une autre définition possible est obtenue en observant que

$$(\underbrace{11\cdots1}_{n \text{ fois}})_3 = (\underbrace{11\cdots1}_{n-1 \text{ fois}})_3 \times (10)_3 + 1,$$

d'où on déduit immédiatement

$$f(n) = 3f(n-1) + 1.$$