Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.
IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.
Durée : 1h30. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1
Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

(c) Calculer la décomposition en cycles (disjoints) de $(5\ 2) \circ (1\ 4) \circ (6\ 2) \circ (1\ 4)$ (**N.B :** on a utilisé la notation cyclique pour écrire permutations).

Question 2
La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la récurrence

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

De façon similaire, la suite de Lucas est définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ et par la même récurrence

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

(a) Démontrer par récurrence que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ pour tout $n > 0$.

(b) Démontrer que $L_n = F_n + 2F_{n-1}$.

Question 3
La mairie de Paris veut étudier le stationnement des voitures sur la Place Charles de Gaulle. Nous allons considérer une place idéalisée, où n emplacements pour voitures se succèdent sans interruptions et son numérotés de 0 à $n-1$, comme dans le dessin.

(a) Supposons que n voitures *différentes* arrivent dans la place (on les distinguera par leur couleur). Combien de façons différentes y a-t-il de les garer ?

(b) Supposons maintenant que m voitures (avec $m \leq n$) *différentes* arrivent. Combien de façons différentes y a-t-il de les garer ?

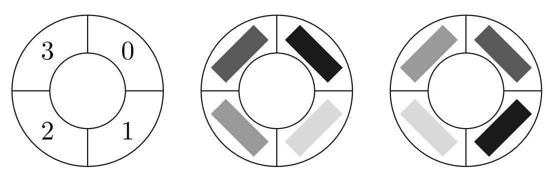

FIGURE 1 – Une place circulaire avec 4 emplacements, et deux façons différentes d'y garer des voitures.

Un avion survole la place et en prend une photo. Sa boussole est cassée et il n'y a pas d'autre signes distinctifs dans la place, par conséquent on ne peut pas savoir comment orienter la photo. Par exemple, les deux dessins en Figure 1 vont donner la même photo (il suffit d'en tourner un d'un quart de tour).

(c) Combien de photos *différentes* peut prendre un avion s'il y a n emplacements et m voitures ?

L'avion répare sa boussole et prend d'autres photos, mais cette fois-ci il a volé trop haut et il n'est plus possible de distinguer les couleurs des voitures : en regardant une photo on peut seulement dire si un emplacement est occupé ou non.

(d) S'il y a m voitures sur la place, combien de photos différentes peut prendre l'avion ?

(e) Combien de photos différentes peut prendre l'avion au total (en considérant tous les m) ?

Sur la place il n'y a pas que des voitures : les touristes y débarquent par centaines en autocar. Un autocar de tourisme prend deux places ordinaires, comme montré dans la figure ci-contre. On va s'intéresser au nombre de façons de remplir **complètement** tous les n emplacements avec un mélange de voitures et d'autocars, sans pouvoir distinguer par la couleur. On note P_n ce nombre.

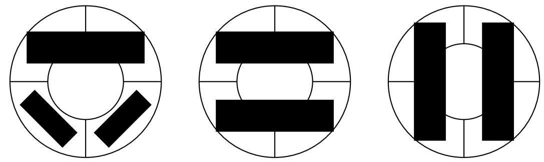

FIGURE 2 – La même place, avec des autocars et des voitures.

(f) Combien y a-t-il de façons de remplir une place avec 3 emplacements ? Et avec 4, 5 ?

On va montrer que P_n correspond à la suite de Lucas de l'exercice précédent. Les questions qui suivent essayent de vous guider vers le résultat, mais vous n'êtes pas obligés de les suivre dans l'ordre.

(g) ($*$) On considère toutes le façons de remplir n emplacements qui ne comportent pas de voiture sur les places 0 et 1. Combien y en a-t-il ? Exprimer en fonction de P_j pour un $j < n$ et justifier.

(h) ($*$) On considère toutes le façons de remplir n emplacements qui comportent au moins une voiture sur les places 0 et 1. Combien y en a-t-il ? Exprimer en fonction de P_j pour un $j < n$ et justifier.

(i) Donner une définition récursive pour P_n. En déduire que P_n correspond avec la suite de Lucas pour $n \geq 3$. Expliquer ce qui se passe pour $n < 3$.

Solutions

Solution 1

(a) $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $\qquad \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\sigma_1 = (1\ 2)(3\ 6\ 4\ 5)$, $\sigma_2 = (1\ 6\ 3\ 5\ 2\ 4)$, $\sigma_1^{-1} = (1\ 2)(3\ 5\ 4\ 6)$, $\sigma_2^{-1} = (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6)$.

(c) En faisant commuter les cycles disjoints, on réécrit la composition comme $(5\ 2) \circ (6\ 2) \circ (1\ 4) \circ (1\ 4)$. On remarque que les deux transpositions de droite sont l'une l'inverse de l'autre, ce qui permet de réécrire $(5\ 2) \circ (6\ 2)$. Finalement, on calcule le résultat : $(5\ 2\ 6)$.

Solution 2

(a) On vérifie que $1 = L_1 = F_0 + F_2 = 0 + 1$ et que $3 = L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2$. Maintenant on suppose l'égalité vraie pour tout $m < n$ et on veut la montrer pour n. Par définition, on a

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence (pour $m = n - 1$ et $m = n - 2$) on a

$$L_n = F_{n-2} + F_n + F_{n-3} + F_{n-1} = F_{n-2} + F_{n-3} + F_n + F_{n-1}.$$

Enfin, on utilise deux fois la définition de la suite de Fibonacci ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) pour monter que

$$L_n = F_{n-2} + F_{n-3} + F_n + F_{n-1} = F_{n-1} + F_{n+1}.$$

Remarquons ici qu'il n'aurait pas suffi de vérifier l'initialisation pour un seul cas. Le fait d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour $n - 1$ **et** $n - 2$ nous oblige à vérifier au moins deux cas de base.

(b) Pas besoin d'induction ici. On sait déjà que

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1};$$

par définition $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donc

$$L_n = F_{n-1} + F_n + F_{n-1} = 2F_{n-1} + F_n.$$

Solution 3

(a) Le fait que la place soit circulaire n'a pas d'importance ici. Si on commence de la place 0, on a une suite de n couleurs différentes, et une configuration correspond à une permutation (un anagramme) de ces couleurs. Il y a donc $n!$ configurations possibles.

(b) La seule différence avec le cas précédent, c'est que certains emplacements peuvent rester vides. On reconnaît dans ce problème celui des *combinaisons ordonnées*, et on sait qu'il y a donc

$$\binom{n}{m} m! = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$$

configuration possibles (cela correspond à $\binom{n}{m}$ choix pour les emplacements occupés, multiplié par les $m!$ permutations possibles des couleurs).

(c) La seule chose qui change par rapport à la question précédente, c'est que deux configurations sont la même si et seulement si une rotation de la place transforme l'une dans l'autre. Si on exclut le cas où toute la place est vide (une seule possibilité), pour une configuration donnée il y a exactement n rotations possibles (qui seraient toutes distinguables avec une boussole). Par conséquent, il suffit de diviser la réponse de la question précédente par n :

$$\binom{n}{m} \frac{m!}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} = (n-1)\cdots(n-m+1).$$

(d) À nouveau, le fait que la place soit circulaire n'a plus d'importance. On a n cases qu'on veut remplir avec m voitures. On reconnaît le problème des *combinaisons* (l'ordre ne compte plus, maintenant). Il y a donc $\binom{n}{m}$ configurations possibles.

(e) La formule du binôme nous dit que

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n.$$

(f) On va introduire une notation plus succincte pour représenter une place avec des autocars et des voitures. On va lister le contenu des emplacements à partir de 0 : on va écrire un point • pour une voiture et un rectangle ▬ pour un autocar ; lorsque un autocar occupe les places $n-1$ et 0, on va utiliser un demi rectangle ■ à la fin et au début de la séquence. Par exemple, lest trois configurations de la Figure 2 sont représentées, respectivement par ■••■, ■▬■ et ▬▬.

On passe maintenant au comptage des configurations. Il s'agit simplement d'une vérification, puisqu'on s'attend déjà à voir apparaître la suite de Lucas. Pour $n = 3$ il y a 4 configurations possibles :

•••
▬•
•▬
■•■

Pour $n = 4$ il y en a 7 :

••••
▬••
•▬•
••▬
■••■
▬▬
■▬■

Pour $n = 5$ il y en a 11 :

•••••
▬•••
•▬••
••▬•
•••▬
■•••■
▬▬•
•▬▬
■•▬■
▬•▬
■▬•■

(g) Ces configurations comportent nécessairement au moins un autocar, en effet elles commencent toutes par ▬ ou ■▬. L'idée consiste à les obtenir toutes en prenant chacune des configurations avec $n-2$ emplacements et en y ajoutant un autocar.

Il y a deux cas possibles. Soit la configuration commence par ▬, auquel cas elle peut être obtenue en ajoutant un car à la gauche d'une configuration de $n-2$ emplacements qui ne commence pas par un demi-car ■. Par exemple, pour $n = 5$ cela donne les configurations

▬ •••
▬ ▬•
▬ •▬

observez qu'il manque le cas ■•■ car il commence par un demi-car.

Soit la configuration commence par ■, auquel cas elle se termine aussi par ■. Elle peut alors être obtenue en ajoutant un car sur les emplacements 1 et 2 à une configuration de $n-2$ emplacements qui commence par un demi-car. Par exemple, pour $n=5$ cela donne l'unique configuration

▬ ■•■ → ■▬•■

On vérifie aisément que cela couvre de façon unique toutes les possibilités pour $n=5$, et il est facile de se convaincre que c'est le cas pour tout n. On déduit qu'il y a P_{n-2} configurations ne comportant pas de voiture sur les emplacements 0 et 1.

(h) Ces configurations comportent nécessairement au moins une voiture, en effet elles commencent par • ou par ■•. Comme auparavant, on a envie de les obtenir en ajoutant une voiture à une configuration à $n-1$ emplacements. On a à nouveau deux cas.

Les configurations qui commencent par • sont obtenues en ajoutant une voiture à la gauche d'une configuration à $n-1$ emplacements ne commençant pas par un demi-car. Pour $n=5$ on a les configurations

• ••••
• ▬••
• •▬•
• ••▬
• ▬▬

Les configurations qui commencent par ■• sont obtenues en ajoutant une voiture à l'emplacement 1 à une configuration à $n-1$ emplacements qui commence par un demi-car. Pour $n=5$ on a les configurations

• ■••■ → ■•••■
• ■▬■ → ■•▬■

On vérifie à nouveau que cela couvre de façon unique toutes les possibilités pour tout n. On déduit qu'il y a P_{n-1} configurations comportant au moins une voiture sur les emplacements 0 et 1.

(i) Les deux cas précédents sont mutuellement exclusifs et recouvrent toutes les possibilités, on en déduit que $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$. Puisque $P_3 = L_3$ et $P_4 = L_4$, on conclut que P_n coïncide avec la suite de Lucas pour tout $n \geq 3$.

Pour $n=1$ on a aussi $P_1 = L_1$, mais pour $n=2$ il se passe quelque chose de bizarre. En effet, il n'y a apparemment que deux configurations possibles : deux voitures ou bien un autocar. Mais $L_2 = 3$, on s'attendrait alors à voir 3 configurations. Le mystère s'explique si on utilise la notation que nous avons introduite ici, on a dans ce cas bien 3 configurations, à savoir

••
▬
■■

Les deux dernières correspondent à un seul bus, mais il y a une différence entre elles : dans la première le bus à la queue garée sur l'emplacement 0 et la tête sur l'emplacement 1. Dans la deuxième la queue est sur l'emplacement 1 et la tête sur 0. Les deux configurations sont bien possibles, même sur une place à sens unique : la deuxième correspond en effet à un bus qui a fait un demi-tour de la place en plus avant de se garer. Si on prend en compte ce détail, on a bien $P_n = L_n$ pour tout $n \geq 1$.