

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

**IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.**

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

### Question 1

- (a) Donner un exemple de bijection de l’ensemble des nombres naturels  $\mathbb{N}$  vers lui même, autre que la fonction identité.
- (b) Donner un exemple de bijection entre l’ensemble des nombres pairs et l’ensemble des nombres impairs.
- (c) Donner un exemple d’application surjective de  $\mathbb{Q}$  vers  $\mathbb{Z}$ .

### Question 2

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

- (a) La fonction,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(n) = n^3$ ,
- (b) La fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $f(n) = n(n - 1)$ ,
- (c) La fonction cardinalité  $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , qui associe à tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  son nombre d’éléments (ou infini).

### Question 3

Soit  $A$  l’ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Pour chacune des relations binaires sur  $A$  ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de  $A \times A$ ), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- (a)  $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ ,
- (b)  $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$ ,
- (c)  $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 2)\}$ .

**Suggestion :** dessinez les diagrammes des relations.

### Question 4

On considère la relation  $\blacktriangle$  sur  $(\mathbb{N}^+)^2$  (les paires d’entiers positifs) définie par

$$(a, b)\blacktriangle(c, d) \quad \text{ssi} \quad ad = bc.$$

- (a) La relation  $\blacktriangle$  est-elle réflexive, symétrique, transitive, anti-symétrique ?
- (b) Décrire la classe d’équivalence de  $(1, 1)$ .

### Question 5

Montrer par induction que  $\sum_{k=0}^n (5k + 7) = \frac{1}{2} (5n + 14)(n + 1)$  pour tout  $n \geq 0$ .

### Question 6

Donner une définition récursive de la fonction

$$f(n) = \frac{3}{2}n(n + 1).$$

**Note :** Il y a plein de définitions récursives possibles. On vous en demande une quelconque. N’oubliez pas le(s) cas de base.