Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.
IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.
Durée : 1h30. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

(c) Calculer la décomposition en cycles (disjoints) de $(4\ 5) \circ (2\ 3) \circ (6\ 5) \circ (2\ 3)$ (**N.B :** on a utilisé la notation cyclique pour écrire les permutations).

Question 2

Le reversi se joue sur un plateau 8×8. Les deux joueurs (blanc et noir) disposent chacun à son tour un pion sur le plateau. Dans les questions qui suivent nous allons ignorer les vraies règles du reversi, et nous allons nous intéresser seulement aux façons de placer les pions blancs et noirs sur le plateau.

(a) On vous affirme qu'il y a n pions blancs sur le plateau et aucun pion noir. Combien de dispositions sont possibles ?

(b) On vous affirme qu'il y a n pions blancs et m pions noirs. Combien de dispositions sont possibles ?

(c) On vous affirme qu'il y a n pions sur le plateau. Combien de dispositions sont possibles ?

(d) Combien de dispositions avec un nombre arbitraire de pions sont possibles au total ?

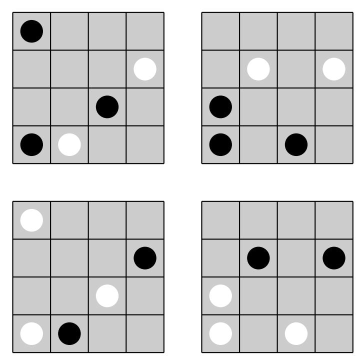

Figure 1 – Quatre dispositions différentes avec 5 pions sur un plateau simplifié.

Question 3

Le *triangle de Hosoya* est une construction similaire au triangle de Pascal. Si on note $\left\{{n \atop k}\right\}$ le coefficient de Hosoya à la ligne n et colonne k (on compte à partir de 0), les valeurs du triangle de Hosoya sont définies par la récurrence

$$\left\{{0 \atop 0}\right\} = \left\{{1 \atop 0}\right\} = \left\{{1 \atop 1}\right\} = \left\{{2 \atop 1}\right\} = 1,$$

$$\left\{{n \atop k}\right\} = \begin{cases} \left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-2 \atop k}\right\} & \text{si } k < n-2, \\ \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + \left\{{n-2 \atop k-2}\right\} & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Autrement dit, $\left\{{n \atop k}\right\}$ est la somme des deux coefficients au dessus de lui dans la diagonale gauche ou droite (voir figure).

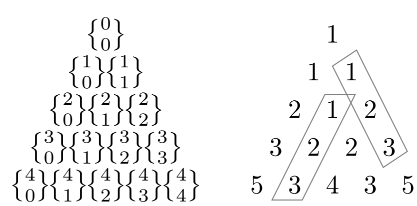

Figure 2 – Le triangle de Hosoya. Dans les deux encadrés 3 est calculé comme la somme de 1 et de 2.

(a) Démontrer par induction que la définition est correcte, c'est à dire, que les coefficients de Hosoya sont symétriques :

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-k \end{Bmatrix}.$$

On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par la récurrence

$$F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2).$$

(b) Démontrer par induction que

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = F(k+1)F(n-k+1).$$