Ne répondez pas aux questions par un simple *oui* ou *non*. Argumentez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les exercices difficiles.

Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Notez le numéro de sujet sur votre copie.

Question 1

Calculer la valeur en base 10 de l'expression suivante

$$\frac{(18000)_9 - (112100000)_3}{3^5}$$

Question 2

Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(6\,k - 10) = (n+1)(3\,n - 10)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 3

Simplifier la formule suivante en minimisant le nombre de disjonctions et de conjonctions : $B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + ABC + \bar{A}BC\bar{D}$.

Question 4

On considère le système de preuve constitué des schémas d'axiomes

1. $(\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$,
2. $(\phi \wedge \neg\psi) \to \neg(\phi \to \psi)$.

et des règles d'inférence suivantes (*modus ponens* et *introduction de la disjonction*)

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi}M, \qquad \frac{\phi}{\phi \vee \psi}\vee_l, \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\vee_r,$$

(a) Donner une preuve formelle de $A \vdash (A \vee B)$.

(b) Donner une preuve formelle de $\neg A \vdash A \to B$.

Question 5

On considère la fonction sur les entiers $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(x) = 6x$.

(a) La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

On considère maintenant la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $f(x) - f(y)$ est divisible par 5.

(b) Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ? $1\mathcal{R}4$, $1\mathcal{R}-1$, $2\mathcal{R}7$, $9\mathcal{R}-6$, $3\mathcal{R}0$.

(c) La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive ?

(d) Décrire la classe d'équivalence de 0. Combien de classes d'équivalence y a-t-il en tout ?

On note $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x par la relation $\mathcal{R}$. On rappelle que $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$ (lu $\mathbb{Z}$ *modulo* $\mathcal{R}$) est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ par la relation $\mathcal{R}$.

(e) ($*$) Prouver que $f(x)\mathcal{R}f(y)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.

(f) ($*$) On définit la fonction $\bar{f} : \mathbb{Z}/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}/\mathcal{R}$ par $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$. Prouver que $\bar{f}$ est la fonction identité $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}$.

Question 6

Soients

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

Question 7

On considère le grillage $n \times n$ du plan. Un *chemin croissant* est une suite de *pas* de longueur unitaire dirigés vers le haut ou vers la droite, qui part du point en bas à gauche et qui atteint le point en haut à droite de la grille. La Figure 1 montre deux exemples de chemins croissant sur la grille 6×6.

(a) Combien de pas vers la droite contient un chemin croissant ? Combien de pas vers le haut ?

On note $C(n)$ le nombre total de chemins croissants sur la grille $n \times n$. Par convention, on fixe $C(0) = 1$.

(b) Combien valent $C(1)$ et $C(2)$?

À chaque chemin on peut associer un mot comme suit : à chaque pas vers le haut on associe la lettre H, à chaque pas vers la droite on associe la lettre D. Ainsi, aux deux exemples de Figure 1 sont associés, respectivement, les mots HDHDHDHDHDHD et DDDDDDHHHHHH.

(c) Combien d'anagrammes possède un mot de n lettres **différentes** ?

(d) ($*$) Combien d'anagrammes possède le mot DDDDDDHHHHHH ?

(e) En déduire que $C(n) = \binom{2n}{n}$.

(f) On considère maintenant une grille $n \times m$ et on définit $C(n, m)$ comme le nombre total de chemins croissants sur cette grille. Combien vaut $C(n, m)$?

(g) ($*$) Donner une définition récursive de $C(n, m)$ en termes de $C(n-1, m)$ et $C(n, m-1)$.

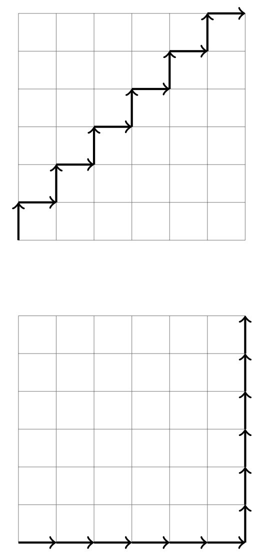

FIGURE 1 – Deux chemins croissants sur une grille 6×6

Solutions

Solution 1 En passant par la base 3 on a

$$\frac{(18000)_9 - (112100000)_3}{3^5} = \frac{(180)_9}{3^1} - (1121)_3 = \frac{(12200)_3}{3^1} - (1121)_3 =$$
$$(1220)_3 - (1121)_3 = (22)_3 = 8$$

Solution 2 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}(6\,k-10) = 6\,n-4+\sum_{k=0}^{n}(6\,k-10) = 6\,n-4+3\,n^2-7\,n-10 = 3\,n^2-n-14 = (n+2)(3\,n-7).$$

Alternativement, on aurait pu remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n}(6\,k-10) = -10n + 6\sum_{k=0}^{n} k$$

et conclure en utilisant l'égalité bien connue sur la série arithmétique : $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$.

Solution 3 $A\bar{B}\bar{C}D + ABC + B\bar{D}$.

Solution 4

1. $\dfrac{\neg A}{\neg A \vee B}$,
2. $\dfrac{(\neg A \vee B) \to (A \to B) \qquad \dfrac{\neg A}{\neg A \vee B}}{A \to B}$.

Solution 5

(a) La fonction f est injective. En effet $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 6x = 6y \Leftrightarrow x = y$. Elle n'est pas surjective car son image ne contient aucun nombre impair, par exemple.

(b) Le seules relations vraies sont $2\mathcal{R}7$ et $9\mathcal{R}-6$, en effet $6\cdot(2-7) = 6\cdot(-5)$ et $6\cdot(9-(-6)) = 6\cdot 15$ sont divisibles par 5.

(c) La relation $\mathcal{R}$ est :
- réflexive, en effet $x\mathcal{R}x$ car $6x - 6x = 0$;
- symétrique, en effet si $6x - 6y$ est divisible par 5 alors $6y - 6x$ l'est aussi ;
- transitive, en effet si $6x - 6y = 5a$ et $6y - 6z = 5b$, alors $6x - 6z = 6(x-y) + 6(y-z) = 5a + 5b = 5(a+b)$.

Elle n'est pas anti-symétrique, en effet on a $0\mathcal{R}5$ et $5\mathcal{R}0$, sans pour autant que $0 = 5$.

(d) La classe d'équivalence de 0 contient tous les x tels que $6x$ est divisible par 5, c'est à dire tous les multiples de 5. La classe d'équivalence de 1 contient tous les x tels que $6x - 6 = 6(x-1)$ est divisible par 5, autrement dit tous les x tels que $x - 1$ est divisible par 5. En continuant, on voit qu'il s'agit de la relation d'équivalence modulo 5, il y a donc 5 classes d'équivalence en tout.

(e) $x\mathcal{R}y$ ssi $6x - 6y$ est divisible par 5, et $f(x)\mathcal{R}f(y)$ ssi $36x - 36y$ est divisible par 5. Puisque 6 et 36 ne sont pas divisibles par 5, les deux conditions sont équivalentes entre elles et à $x - y$ divisible par 5.

(f) Il suffit de vérifier cela pour les valeurs de 0 à 5. $\bar{f}(\bar{0}) = \overline{f(0)} = \overline{6\cdot 0} = \bar{0}$. Les autres cas sont similaires. Alternativement, on aurait pu remarquer que f est la multiplication par 6 sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et que $6 \equiv 1 \bmod 5$.

Solution 6

(a) $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$

(b) $\sigma_1 = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)$, $\sigma_2 = (1\ 3\ 5\ 6)$, $\sigma_1^{-1} = (1\ 4\ 3\ 5\ 2)$, $\sigma_2^{-1} = (1\ 6\ 5\ 3)$.

Solution 7

(a) De façon évidente, un chemin croissant contient n pas vers la droite et n pas vers le haut.

(b) On a $C(1) = 1$ et $C(2) = 6$.

(c) On a vu en cours qu'un mot de n lettres distinctes a $n!$ anagrammes.

(d) Le mot DDDDDDHHHHHH contient 6 D et 6 H. On numérote les lettres D et H de 1 à 6 :

$$D_1D_2D_3D_4D_5D_6H_1H_2H_3H_4H_5H_6.$$

Ce mot a 12! anagrammes, mais beaucoup de ces anagrammes correspondent au même mot, une fois les indices enlevés. En effet, pour chaque anagramme numéroté il y a 6! façon d'échanger les lettres D sans changer le mot non numéroté, et 6! façon d'échanger les lettres H ; donc au total 6!6! anagrammes du mot numéroté qui donnent le même mot non numéroté. On conclut qu'il y a $\frac{12!}{6!6!}$ anagrammes différents.

(e) D'après la discussion précédente, on voit qu'il y a $\frac{2n!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$ chemins croissants possibles.

(f) Par la même technique, on voir que $C(n, m) = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$.

(g) On considère le premier pas. S'il s'agit d'un pas vers le haut, le reste du chemin est un chemin croissant dans la grille $n \times m - 1$, s'il s'agit d'un pas vers le bas, le reste du chemin est un chemin croissant dans la grille $n - 1 \times m$. On en déduit la relation

$$C(n, m) = C(n - 1, m) + C(n, m - 1),$$

qui est l'analogue de la relation bien connue

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$