Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.
IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.
Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1
Calculer la valeur en base 10 de l'expression suivante

$$\frac{(101000)_4 - (540)_{16}}{2^6}$$

Question 2
Prouver que

$$p \to r \ \models \ (p \wedge q) \to r.$$

Question 3
En utilisant exclusivement les symboles $+, -, \times, =, \leq$, les constantes $0, 1, 2, \ldots$ et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l'affirmation « tout nombre peut s'écrire comme somme de deux nombres non nuls ».

Question 4
Montrer par induction que $\sum_{k=0}^{n}(9\,k-1) = \frac{1}{2}\,(n+1)(9\,n-2)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 5
Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

(a) La tangente, $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
(b) La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n!$,
(c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

Question 6
Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$,
(b) $\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,3)\}$,
(c) $\mathcal{T} = \{(0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (2,3)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

(d) Y a-t-il des relations d'équivalence ? Quelles sont les classes d'équivalence ?

Question 7
Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.
(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

Question 8

On s'intéresse au nombre de façons d'écrire un entier n comme une somme de k entiers positifs. Par exemple, 4 peut s'écrire de trois façons différentes comme une somme de trois entiers :

$$1 + 1 + 2, \quad 1 + 2 + 1, \quad 2 + 1 + 1$$

On va noter $S(n, k)$ ce nombre, donc $S(4, 3) = 3$.

(a) Énumérer toutes les possibilités pour $1 \leq k \leq n \leq 4$. Combien vaut $S(n, k)$ dans ces cas ?

(b) Pour un n quelconque, combien valent $S(n, 1)$ et $S(n, n)$?

(c) Pour un n quelconque, combien valent $S(n, 2)$ et $S(n, n - 1)$?

(d) Combien de façons y a-t-il d'écrire n comme une somme de k entiers positifs commençant par $1 + \cdots$? (Dans l'exemple, on voit que le seules possibilités pour $n = 4$, $k = 3$ sont $1 + 1 + 2$ et $1 + 2 + 1$.)

(e) Combien de façons y a-t-il d'écrire n comme une somme de k entiers positifs ne commençant pas par $1 + \cdots$? (Dans l'exemple, on voit que la seule possibilité pour $n = 4$, $k = 3$ est $2 + 1 + 1$.)

(f) En déduire une définition récursive de $S(n, k)$.

(g) Prouver par induction que $S(n, k) = \binom{n-1}{k-1}$.

(h) $(**)$ Combien de façons y a-t-il de d'écrire un entier n comme une somme de k entiers *positifs ou nuls* ?

Solutions

Solution 1 En passant par la base 4 on a

$$\frac{(101000)_4-(540)_{16}}{2^6}=\frac{(101000)_4-(111000)_4}{2^6}=\frac{(-10000)_4}{2^6}=(-10)_4=-4.$$

Solution 2 Il suffit d'écrire les tables de vérité.

p	q	r	$p \to r$	$(p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

On remarque qu'à chaque fois que la proposition de gauche est vraie, celle de droite l'est aussi. Donc $(p \wedge q) \to r$ est bien une conséquence logique de $p \to r$. On remarque, par contre, que les deux propositions ne sont pas sémantiquement équivalentes.

Solution 3

$$\forall x.\exists y.\exists z.(x=y+z)\wedge\neg(y=0)\wedge\neg(z=0).$$

Solution 4 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}(9\,k-1)=9\,n+8+\sum_{k=0}^{n}(9\,k-1)=9\,n+8+\frac{9}{2}\,n^2+\frac{7}{2}\,n-1=\frac{9}{2}\,n^2+\frac{25}{2}\,n+7=\frac{1}{2}\,(n+2)(9\,n+7).$$

Solution 5

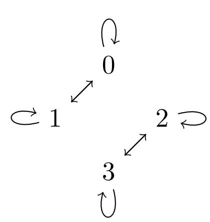
(a) La tangente prend toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$, elle est donc surjective. Par contre, elle est périodique de période 2π, c'est à dire que $\tan(x)=\tan(x+2\pi)$ pour tout x ; elle n'est donc pas injective.

(b) On a $0!=1!=1$, la fonction factorielle n'est donc pas injective. Il est facile de voir que la fonction factorielle est croissante, en effet $n!=n\cdot(n-1)!\geq n-1!$. On a $2!=2$ et $3!=6$, puisque la factorielle est croissante, elle ne peut prendre aucune valeur entre 3 et 5 ; elle n'est donc pas surjective.

(c) On a $(-1)^2=1^2=1$, la fonction n'est donc pas injective. Elle ne prend aucune valeur négative, elle n'est donc pas non plus surjective.

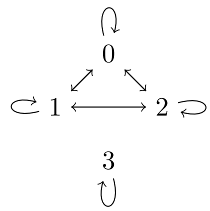
Solution 6

(a) Le graphe de la relation $\mathbb{R}$ est



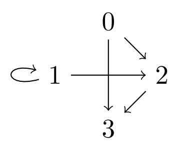
Elle est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas anti-symétrique, car il y a une double flèche, par exemple, entre 0 et 1.

(b) Le graphe de la relation $\mathcal{S}$ est



Elle est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas anti-symétrique, car il y a une double flèche, par exemple, entre 0 et 1.

(c) Le graphe de la relation $\mathcal{T}$ est



Elle n'est pas symétrique, ni réflexive, ni transitive (on a un chemin $1 \to 2 \to 3$, mais pas $1 \to 3$). Elle est anti-symétrique (pas de double flèches entre éléments distincts).

(d) Les relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, symétriques et transitives, elles sont donc des relations d'équivalence. Dans le premier cas, il y a deux classes d'équivalence : $\{0,1\}$ et $\{2,3\}$. Dans le second cas, il y a deux classes d'équivalence : $\{0,1,2\}$ et $\{3\}$.

Solution 7

(a) $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $\sigma_1 = (1\ 6\ 3\ 2\ 5)$, $\sigma_2 = (1\ 4\ 6\ 5\ 2\ 3)$, $\sigma_1^{-1} = (1\ 5\ 2\ 3\ 6)$, $\sigma_2^{-1} = (1\ 3\ 2\ 5\ 6\ 4)$.

Solution 8

(a) Voici la liste des possibilités :

$$\begin{array}{llll} 1 = 1, & & & \\ 2 = 2, & 2 = 1+1, & & \\ 3 = 3, & 3 = 1+2 = 2+1, & 3 = 1+1+1, & \\ 4 = 4, & 4 = 1+3 = 3+1, & 4 = 1+1+2 = 1+2+1 = 2+1+1, & 4 = 1+1+1+1. \end{array}$$

Ce qui donne les premières lignes du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

(b) On voit bien que la seule façon d'écrire n comme une somme de 1 terme est $n = n$. La seule façon d'écrire n comme une somme de n termes est $n = 1 + 1 + \cdots + 1$. Donc $S(n,1) = S(n,n) = 1$.

(c) Les façons d'écrire n comme une somme de 2 termes sont :

$$1 + (n-1), \quad 2 + (n-2), \quad \ldots, \quad (n-1) + 1.$$

Ceci correspond à écrire $n = a + b$, avec $a = m$ et $b = n - m$, où les valeurs de m comprises entre 1 et $n-1$ sont acceptables. Il y a donc $n-1$ façons possibles.

Les façons d'écrire n comme une somme de $n-1$ termes sont :

$$1+1+\cdots+1+2, \quad 1+1+\cdots+2+1, \quad \ldots, \quad 2+1+\cdots+1.$$

Le terme 2 peut être placé à n'importe laquelle des $n-1$ positions, il y a donc $n-1$ possibilités. Donc $S(n,1) = S(n,n-1) = n-1$.

(d) Supposons que n est écrit comme un somme de k termes $n = 1 + \cdots$. Si on enlève le premier 1, il reste $k-1$ termes qui somment à $n-1$. Il y a donc $S(n-1,k-1)$ façons différentes d'écrire n ainsi.

(e) Supposons que n est écrit comme une somme de k termes $n = a + \cdots$, avec $a > 1$. Puisque $a > 1$, on peut enlever 1 de a et obtenir une somme de k termes positifs

$$n - 1 = (a-1) + \cdots .$$

Il y a donc $S(n-1,k)$ façons différentes d'écrire n ainsi.

(f) Des deux points précédents, on déduit $S(n,k) = S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$.

(g) On a déjà vérifié au premier point que $S(1,1) = \binom{0}{0} = 1$. Par induction sur n, on déduit du point précédent

$$S(n,k) = S(n-1,k) + S(n-1,k-1) = \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} = \binom{n-1}{k-1},$$

où la deuxième égalité vient de l'hypothèse de récurrence, et la troisième de l'égalité fondamentale sur les coefficients binomiaux.

(h) Considérons une somme de k termes positifs ou nuls, par exemple

$$4 = 0 + 1 + 2 + 0 + 1.$$

En ajoutant 1 à chacun des k termes on obtient k termes strictement positifs qui somment à $n+k$, par exemple

$$4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 1 + 2.$$

Deux sommes différentes pour n donneront lieu à deux sommes différentes pour $n+k$ par cette transformation, et toute somme pour $n+k$ peut s'obtenir de cette façon. Autrement dit, on a établi une bijection entre les sommes de k entiers positifs ou nuls pour n et les sommes de k entiers positifs pour $n+k$. On en déduit qu'en général il y a $S(n+k,k) = \binom{n+k-1}{k-1}$ façons d'écrire n comme une somme de k entiers positifs ou nuls.