Ne répondez pas aux questions par un simple *oui* ou *non*. Argumentez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les exercices difficiles.

Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Notez le numéro de sujet sur votre copie.

Question 1

Calculer la valeur en base 10 de l'expression suivante

$$\frac{(\mathtt{E80})_{16} - (5200)_8}{2^7}$$

Question 2

Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(4\,k+9) = (n+1)(2\,n+9)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 3

Simplifier la formule suivante en minimisant le nombre de disjonctions et de conjonctions : $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{C}\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D}$.

Question 4

On considère le système de preuve constitué des schémas d'axiomes

1. $\phi \to (\psi \to \phi)$,
2. $\phi \to \phi$,
3. $\neg\neg\phi \to \phi$.
4. $(\psi \to \phi) \to (\neg\phi \to \neg\psi)$;

et du seul *modus ponens*

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \phi}{\psi}$$

Montrer que

(a) $\vdash \neg A \to \neg A$,

(b) $\vdash B \to (\neg A \to \neg A)$.

Question 5

Soit A un ensemble contenant k éléments et B un ensemble contenant n éléments. Deux fonctions $f, g : A \to B$ sont égales si et seulement si $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$.

(a) Combien de fonctions différentes de A vers B existe-t-il ?

(b) À quelles conditions sur k et n il existe des fonctions injectives de A vers B ?

En supposant que k et n sont tels qu'il y a des fonctions injectives de A vers B, on veut maintenant compter combien il y a de telles fonctions. On va procéder par étapes. Soit $f : A \to B$ une fonction injective et soit $C \subset B$ son image.

(c) Quelle est la cardinalité de C ?

(d) On définit la relation suivante sur les fonctions injectives de A vers B : $f \equiv g$ si et seulement si f et g ont la même image. Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et déterminer le nombre de classes d'équivalence.

(e) ($*$) Combien d'éléments contient la classe d'équivalence de f ? Combien d'éléments contient une classe d'équivalence quelconque ?

(f) Conclure.

Question 6

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

Question 7 (Le jeu du Plinko)

Le jeu du Plinko est constitué d'une planche horizontale munie de baguettes fixées perpendiculairement disposées comme en Figure 1.

Le joueur dispose d'un disque qu'il laisse tomber du haut de la planche de plinko (la flèche dans la figure indique le point où le joueur a laissé tomber le disque). Pendant sa descente le disque vient frapper contre une baguette à chaque étage ; et à chaque impact il a autant de chances de tomber à gauche qu'à droite de la baguette (le chemin pointillé montre un exemple de parcours). Si le disque atteint le bord gauche ou droit, il rebondit (comme c'est le cas après le troisième rebond dans la figure). Lorsque le disque atteint le bas de la planche, l'endroit où il atterrit détermine le gain du joueur (la figure montre un exemple de gains).

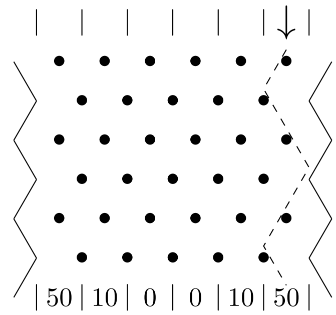

Figure 1 – Jeu du Plinko

Pour étudier le jeu, nous allons commencer par le simplifier. Tout d'abord nous allons supposer que le joueur n'a qu'un seul endroit pour lâcher le disque. De plus, nous allons supposer qu'il n'y a pas de rebonds contre les côtés. Ceci nous amène à étudier une planche triangulaire comme en Figure 2.

On appelle *plinko simplifié* ce nouveau jeu. On appelle *hauteur* du jeu le nombre d'étages (6 dans la figure). Dans un plinko simplifié d'hauteur n, on numérote les cases d'arrivée de 0 jusqu'à n (comme dans la figure) et on note G_i le gain de la i-ème case.

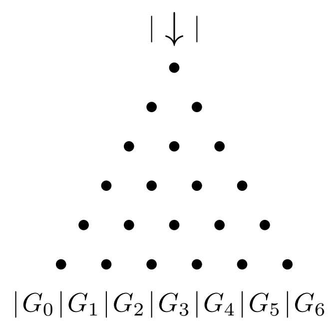

Figure 2 – Plinko simplifié

(a) Combien de baguettes contient le jeu de Plinko simplifié de hauteur n ?

(b) Combien de chemins différents peut emprunter le disque dans un plinko simplifié de hauteur 0, 1, 2 ou 3 ? Combien de ces chemins arrivent dans la case 0, 1, 2, 3 respectivement ?

(c) Considérez le plinko simplifié de hauteur n. Exprimez le nombre de chemins différents qui arrivent dans la k-ième case en fonction des nombres de chemins qui arrivent dans les cases du plinko simplifié de hauteur $n-1$.

(d) Conclure que le nombre total de chemins différents du plinko de hauteur n est 2^n.

(e) $(*)$ Donner une formule exprimant le gain moyen en fonction de n et de $G_0, \ldots, G_n$.

(f) $(**)$ Quelle position de départ est la plus avantageuse dans le plinko de Figure 1 ? (**indice :** considérez le plinko simplifié au départ de chaque case ; pour ne pas avoir à considérer les rebonds, traitez les bords comme des miroirs.)

Solutions

Solution 1 En passant par la base 2 on a

$$\frac{(\texttt{e80})_{16}-(5200)_8}{2^7}=\frac{(\texttt{e8})_{16}}{2^3}-\frac{(52)_8}{2^1}=\frac{(11101000)_2}{2^3}-\frac{(101010)_2}{2^1}=$$
$$(11101)_2-(10101)_2=(1000)_2=8$$

Solution 2 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}(4\,k+9)=4\,n+13+\sum_{k=0}^{n}(4\,k+9)=4\,n+13+2\,n^2+11\,n+9=2\,n^2+15\,n+22=(n+2)(2\,n+11).$$

Alternativement, on aurait pu remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n}(4\,k+9)=9n+4\sum_{k=0}^{n}k$$

et conclure en utilisant l'égalité bien connue sur la série arithmétique : $\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$.

Solution 3 $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{C}\bar{D} + B\bar{C} + AB\bar{D}$.

Solution 4

1. La formule $\neg A \to \neg A$ est une instance de l'axiome 2, ce qui suffit à la prouver. Une autre preuve inutilement plus longue, mais tout de même correcte, est la suivante :

$$\frac{(A\to A)\to(\neg A\to\neg A) \qquad A\to A}{\neg A\to\neg A}.$$

2. $$\frac{(\neg A\to\neg A)\to(B\to(\neg A\to\neg A)) \qquad \neg A\to\neg A}{B\to(\neg A\to\neg A)}.$$

Solution 5

(a) Une fonction est déterminée par l'image de chacun des éléments de A. Puisque on peut associer à chaque élément de A l'un quelconque des éléments de B, on a k^n façons différentes de construire une fonction.

(b) Puisqu'il faut qu'à chaque élément de A soit associé un élément différent de B il faut que B contienne au moins k éléments, donc $k \leq n$.

(c) À cause de ce qui a été dit précédemment, C contient k éléments.

(d) Il s'agit d'une relation d'équivalence car elle est réflexive, symétrique et transitive. La preuve de chacune des propriétés est immédiate. Une classe d'équivalence est l'ensemble de toutes les fonctions injectives ayant la même image, il y a donc autant de classes que d'images possibles. L'image d'une fonction injective contient nécessairement k éléments, il y a donc $\binom{n}{k}$ images différentes.

(e) On ordonne les éléments de A et les éléments de C et on construit la fonction qui envoie le premier élément de A sur le premier de C, le deuxième sur le deuxième, et ainsi de suite. Pour chacune des façons différentes d'ordonner C on obtient une fonction différente. Puisque C contient k éléments, il y a autant de façons d'ordonner C que d'anagrammes d'un mot de k lettres. Il y a donc $k!$ éléments dans la classe de f. Puisqu'on n'a fait aucune hypothèse sur f, toute classe d'équivalence contient $k!$ éléments.

(f) Puisque les classes d'équivalence partitionnent l'ensemble des fonctions injectives, il y a au total $\binom{n}{k}k! = n!/(n-k)!$ fonctions injectives différentes.

Solution 6

(a) $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\sigma_1 = (1\ 2\ 5\ 3\ 6\ 4)$, $\sigma_2 = (1\ 5\ 3\ 2)$, $\sigma_1^{-1} = (1\ 4\ 6\ 3\ 5\ 2)$, $\sigma_2^{-1} = (1\ 2\ 3\ 5)$.

Solution 7

(a) On observe que le premier étage contient une baguette, le deuxième deux et ainsi de suite. Le nombre total de baguettes est donc égal à la n-ième somme partielle de la *série arithmétique* $\sum_{i>0} i$. L'égalité $\sum_{i=0}^{n} i = n(n+1)/2$ est bien connue et peut être démontrée par induction.

(c) On note $C(n,k)$ le nombre de chemins du plinko de hauteur n qui se terminent dans la case k. Soit $0 < k < n$, tout chemin qui se termine dans la case k, provient soit de sa gauche soit de sa droite. Les chemins qui proviennent de la gauche sont les chemins du plinko de hauteur $n-1$ qui se terminent dans la case $k-1$, les chemins qui proviennent de la droite sont ceux qui se terminent dans la case k. On en déduit

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k).$$

Il est immédiat d'observer que $C(n,0) = C(n,n) = 1$, on en déduit que $C(n,k) = \binom{n}{k}$, à cause de la récurrence fondamentale des coefficients binomiaux.

(d) Du théorème binomial on a immédiatement $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(e) Puisque chaque chemin est équiprobable, le gain moyen est $\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k$.

(f) Puisque le jeu est symétrique, on peut se restreindre aux trois premières cases. On considère le plinko simplifié au départ de chacune des cases (la Figure 3 fait l'exemple pour la première case).

Lorsque le disque atteint un bord (dans la figure, le bord gauche est dessiné en pointillé), il part en direction opposée avec probabilité 1. Pour simplifier le problème, on imagine plutôt que lorsque le disque atteint le bord il le traverse avec probabilité 1/2 et il rebondit avec probabilité 1/2. Si on prend le soin de faire en sorte que le gain moyen à partir d'un point quelconque de la planche soit égal au gain moyen à partir de son symétrique par rapport au bord, le gain moyen de tout le plinko simplifié sera égal au gain moyen du plinko d'origine. Pour cela, on assigne aux cases d'arrivée au delà du bord des gains symétriques par rapport au bord.

En conclusion les gains moyens des trois premières cases sont

– $W_0 = \left(\binom{6}{0}0 + \binom{6}{1}10 + \binom{6}{2}50 + \binom{6}{3}50 + \binom{6}{4}10 + \binom{6}{5}0 + \binom{6}{6}0\right)/2^6 = 30,625$;

– $W_1 = \left(\binom{6}{0}10 + \binom{6}{1}50 + \binom{6}{2}50 + \binom{6}{3}10 + \binom{6}{4}0 + \binom{6}{5}0 + \binom{6}{6}10\right)/2^6 = 19,84375$;

– $W_2 = \left(\binom{6}{0}50 + \binom{6}{1}50 + \binom{6}{2}10 + \binom{6}{3}0 + \binom{6}{4}0 + \binom{6}{5}10 + \binom{6}{6}50\right)/2^6 = 9,53125$.

Il est donc plus avantageux de jouer dans la case 0, et par symétrie dans la case 6.

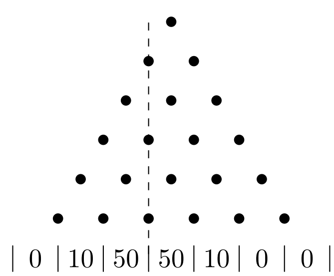

Figure 3 – Plinko simplifié au départ de la case 0 de Figure 1