Lisez le sujet jusqu'au bout, puis revenez ici.

Maintenant choisissez un exercice. Lisez-le en entier, assurez-vous de l'avoir compris, si vous avez un doute n'hésitez pas à poser une question. Essayez de répondre d'abord aux parties qui vous paraissent plus simples, n'hésitez pas à sauter un point sur lequel vous bloquez.

Ne répondez pas aux questions par un simple *oui* ou *non*. Argumentez vos réponses, prouvez vos affirmations.

Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone portable.

Question 1 (3 points)

Effectuer les changements de base suivants

(a) (1 point) $(10011)_2$ en décimal, $(64 * 19 + 3)_{10}$ en binaire.

(b) (1 point) $(54321)_{16}$ en binaire, puis en base 8.

(c) (1 point) $(110111011101, 1101)_2$ en héxadécimal [1].

Question 2 (1½ points)

Prouver **par induction** que pour tout x et tout entier n

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Attention : aucun point ne sera attribué à toute réponse qui n'utilise pas l'induction.

Question 3 (4 points)

Prouver par induction les (in)égalités suivantes

(a) (1 point) $\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

(b) (1 point) $3^n \leq (2n)!$ pour tout $n \geq 2$.

(c) (2 points) $2^n n \leq 3^n$ pour tout $n \geq 0$.

Question 4 (5½ points)

On fixe un $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Soit $H_n = \{0,1\}^n$ l'ensemble des chaînes de bits de longueur n (par exemple 0101 est un élément de H_4).

(a) (½ point) Combien d'éléments contient H_n ?

Pour chaque $0 < i \leq n$ on définit la fonction $\delta_i : H_n \to \{0,1\}$ comme suit

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si le } i\text{-ème bit de } x \text{ en partant de la droite est 0,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, $\delta_1(1010) = 0$.

(b) (½ point) On fixe $n = 4$. Quelle est la cardinalité de $\delta_i^{-1}(0)$, pour $i = 1, \ldots, 4$?

1. Oui, la virgule indique bien une partie fractionnaire. Ne vous faites pas impressionner : elle est là pour vous aider.

(c) (½ point) Pour quelles valeurs de n et i les fonctions δ_i sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Soit $\mathcal{R}$ la relation sur H_n définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si pour tout $0 < i \leq n$, $\delta_i(y) \geq \delta_i(x)$.

(d) (1 point) $\mathcal{R}$ est-elle un ordre ? Est-elle totale ? En donner les preuves, ou montrer des contre-exemples.

(e) (1 point) Dessiner le diagramme de Hasse de $\mathcal{R}$ pour $n = 3$.

(f) (2 points) Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Définir une bijection entre H_4 et $\mathcal{P}(A)$.

Question 5 (9 points)

Soit $H^* = \{0,1\}^* = \bigcup_{n>0} H_n$ l'ensemble de toutes les chaînes de bits de longueur arbitraire.

(a) (2 points) Quelle est la cardinalité de H ? Justifiez votre réponse en exhibant une bijection avec $\mathbb{N}$.

Pour tout $i > 0$, on définit la fonction $\delta_i : H \to \{0, 1\}$ qui associe à un mot $x \in H$ la valeur de son i-ème bit en partant de la droite, ou 0 si x a moins de i bits. Par exemple $\delta_1(10) = \delta_5(10) = 0$.

On définit enfin la fonction $w : H \to \mathbb{N}$ qui associe à un mot $x \in H$ son *poids de Hamming*, c'est à dire son nombre de 1. Par exemple $w(01101) = 3$.

(b) (½ point) La fonction w est elle injective ? surjective ? bijective ?

(c) (½ point) Énumérer les éléments de $w^{-1}(3) \cap w^{-1}(5)$.

(d) (1 point) Les relations suivantes sont-elles réflexives ? symétriques ? transitives ?

1. $x\mathcal{S}y$ si et seulement si $\delta_1(x) = \delta_3(y)$;
2. $x\mathcal{U}y$ si et seulement s'il existe un $i > 0$ tel que $\delta_i(x) = \delta_2(y)$.
3. $x\mathcal{T}y$ si et seulement si $w(x) = w(y)$;

Justifiez vos réponses.

On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de $x \in H$ pour la relation $\mathcal{T}$ donnée au point précédent. Soit $H_n \subset H$ l'ensemble des chaînes de longueur n.

(e) (1 point) Énumérer les éléments de $\overline{0110} \cap H_n$ pour $n = 2, 3, 4$.

(f) (2 points) On note $C(n)$ la cardinalité de $\overline{0110} \cap H_n$. Exprimez $C(n)$ en fonction de $C(n-1)$.

(g) (2 points) Prouvez par induction que $C(n) = n(n-1)/2$.