Lisez le sujet jusqu'au bout, puis revenez ici.

Maintenant choisissez un exercice. Lisez-le en entier, assurez-vous de l'avoir compris, si vous avez un doute n'hésitez pas à poser une question. Essayez de répondre d'abord aux parties qui vous paraissent plus simples, n'hésitez pas à sauter un point sur lequel vous bloquez.

Ne répondez pas aux questions par un simple *oui* ou *non*. Argumentez vos réponses, prouvez vos affirmations.

Les étoiles marquent les exercices difficiles. Plus il y a d'étoiles plus la solution de l'exercice sort des schémas vus en TD.

Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone portable.

Question 1

En utilisant exclusivement [1] les symboles $\in, +, \times, =, \neq, <, >, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, les constantes $0, 1, \ldots$ et les connecteurs de la logique du premier ordre ($\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$), exprimer les assertions suivantes :

(a) Tout entier a un opposé.

(b) Tout entier positif s'écrit comme somme de quatre carrés (théorème de Lagrange).

(c) ($\star$) n est premier.

Question 2

On considère le système de preuve constitué des schémas d'axiomes

1. $(\neg\phi \vee \psi) \to (\phi \to \psi)$,
2. $(\phi \wedge \neg\psi) \to \neg(\phi \to \psi)$,

et des règles d'inférence suivantes (*modus ponens* et *introduction de la conjonction*)

$$\frac{\phi \to \psi \quad \phi}{\psi} M, \qquad \frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_I,$$

(a) Donner une preuve formelle de $A, B \vdash (A \wedge B)$.

(b) Donner une preuve formelle de $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$.

Question 3

Rappel : Une formule de la forme $A \vee B$ (aussi noté $A + B$, surtout en électronique) est appelée une *clause disjonctive*. Une formule de la forme $A \wedge B$ (aussi noté AB) est appelée une *clause conjonctive*.

(a) Trouver les formules booléennees avec le moins de clauses disjonctives possibles correspondantes aux deux tableaux de Karnaugh suivants.

(a.1)

$_{AB}\backslash^{CD}$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

(a.2)

$_{AB}\backslash^{CD}$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

(b) ($\star$) Trouver une formule booléenne équivalente à la formule

$$\bar{A}D + \bar{A}B\bar{D} + ABC\bar{D}$$

ayant le même nombre de clauses disjonctives (trois) et moins de clauses conjonctives.

---

1. En particulier, vous n'avez pas droit à $/, \div, |$, mod et d'autres symboles *exotiques*

Question 4

Soient σ_1 et σ_2 les permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, σ_1^{-1} et $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$.

(b) ($\star$) Exhiber une permutation qui commute avec σ_2 (i.e. telle que $\sigma_2 \circ \tau = \tau \circ \sigma_2$).

Combinatoire des tableaux de Karnaugh

Le but des exercices qui suivent est de montrer (d'une façon un peu tordue) qu'un même tableau de Karnaugh peut donner lieu à plusieurs formules équivalentes. À l'exception de la dernière, les questions sont indépendantes et peuvent être résolues sans respecter l'ordre.

Question 5

Dans la question 3 on s'intéressait aux tableaux de Karnaugh à 4 variables (A, B, C et D) ; on s'intéresse maintenant aux tableaux à un nombre arbitraire de variables.

(a) Combien de cases contient un tableau de Karnaugh à 1, 2, 3 ou 4 variables ? Combien de cases contient un tableau de Karnaugh à n variables ?

(b) Deux tableaux de Karnaugh sont différents si au moins l'une des cases est différente. Sachant qu'une case vaut soit 0, soit 1, combien de tableaux de Karnaugh différents à n variables existent-ils ?

Question 6

On veut maintenant compter combien il y a de *clauses conjonctives*.

(a) On se donne n lettres $A, B, C, \ldots$. Un choix de k lettres parmi les n est appelé une *partie de taille* k. Combien y a-t-il de parties de taille k ?

(b) Une clause conjonctive (par exemple $A\bar{B}D$) peut être vue comme une partie dans laquelle on a marqué certaines lettres avec une barre. Si on a une partie de taille k (par exemple ABD), combien de façons différentes de marquer ses lettres y a-t-il ?

(c) Fixons n variables $A, B, C, \ldots$. Combien y a-t-il de clauses conjonctives différentes contenant exactement k des n variables ? [2]

Question 7

Prouver l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

Question 8

Si on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les clauses conjonctives, une clause disjonctive peut être vue comme un sous-ensemble (éventuellement vide) de $\mathcal{C}$. Supposant qu'il y ait au total m clauses conjonctives, combien de clauses disjonctives y a-t-il ?

Question 9 ($\star\star$)

Cette question est dure pour la simple raison qu'il faut avoir résolu les questions 5 à 8 pour pouvoir y répondre.

(a) Fixons n variables $A, B, C, \ldots$. Combien y a-t-il de clauses disjonctives ?

(b) Déduire qu'à un seul tableau de Karnaugh à n variables correspondent nécessairement plusieurs formules.

(c) Inversement, peut-on avoir une formule à qui correspondent plusieurs tableaux de Karnaugh ?

---

2. Si $k = 0$ on note $\mathbf{1}$ l'unique clause conjonctive contenant 0 variables. C'est la clause qui vaut toujours vrai.

Solutions

Solution 1

(a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, n + m = 0.$

(b) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z}, n = a \times a + b \times b + c \times c + d \times d.$

(c) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, (ab = n) \Rightarrow (a = 1 \vee b = 1).$

Solution 2

(a) C'est une simple application de la règle $\wedge_I$.

$$\frac{\overline{A} \quad \overline{B}}{A \wedge B}\wedge_I$$

(b) Il s'agit d'une application de $\wedge_I$ et d'un *modus ponens* avec l'axiome 2.

$$\frac{(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B) \qquad \dfrac{\overline{A} \quad \overline{\neg B}}{A \wedge \neg B}\wedge_I}{\neg(A \to B)} M$$

Solution 3

(a.1) $\bar{B}\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{A}CD$,

(a.2) Il y a plusieurs solutions contenant quatre clauses conjonctives. Les solutions $AB + \bar{C}D + C\bar{D} + AD$ et $AB + \bar{C}D + C\bar{D} + AC$ sont les deux qui contiennent le moins de clauses conjonctives.

(b) On commence par écrire le tableau de Karnaugh de la formule :

$_{AB}\backslash^{CD}$	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	0

Maintenant on calcule une formule pour ce tableau en faisant bien attention à sélectionner des *paquets* les plus gros possibles (ce qui nous oblige à les superposer). Le résultat est la formule $\bar{A}D + \bar{A}B + BC\bar{D}$.
Alternativement, sans utiliser de tableau, on aurait pu utiliser la distributivité :

$$\bar{A}D + \bar{A}B\bar{D} = \bar{A}(D + B\bar{D}),$$

utiliser une table de vérité (ou un tableau de Karnaugh à deux variables) pour montrer que

$$D + B\bar{D} = D + B,$$

et conclure en appliquant à nouveau la distributivité

$$\bar{A}(D + B\bar{D}) = \bar{A}D + \bar{A}B.$$

Et on peut répéter en simplifiant de la même façon $\bar{A}B + ABC\bar{D} = \bar{A}B + BC\bar{D}$.

Solution 4

(a) On a

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a par définition $\sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} = \mathrm{id}$ et, en substituant cette égalité,

$$\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2 \circ \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1 = \sigma_1^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \sigma_1 = \mathrm{id} \circ \sigma_1^{-1} \circ \sigma_1 = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}.$$

(b) Un choix de simplicité consiste à prendre $\tau = \mathrm{id}$, alors par définition même de l'identité, ceci commute avec n'importe quelle permutation (et donc en particulier avec σ_2).
Si on veut chercher moins trivial, on observe que la décomposition de σ_2 en cycles est $(1\ 6)(3\ 4\ 5) = (3\ 4\ 5)(1\ 6)$ (car les cycles disjoints commutent). On note $\tau = (1\ 6)$, on se souvient qu'il s'agit d'une transposition et que les transpositions sont des involutions, i.e. $\tau = \tau^{-1}$. On en déduit

$$\tau \circ \sigma_2 = \tau \circ (1\ 6)(3\ 4\ 5) = \tau \circ \tau^{-1}(3\ 4\ 5) = \mathrm{id} \circ (3\ 4\ 5) =$$
$$(3\ 4\ 5) \circ \mathrm{id} = (3\ 4\ 5) \circ \tau^{-1} \circ \tau = (3\ 4\ 5) \circ (1\ 6) \circ \tau = \sigma_2 \circ \tau.$$

Solution 5

(a) Les tableaux à 1, 2, 3 ou 4 variables contiennent respectivement 2, 4, 8 et 16 cases. En général, à chaque fois qu'on ajoute une variable on multiplie par deux le nombre de cases, donc par une récurrence évidente on a que un tableau à n variables contient 2^n cases.

(b) Il est bien connu qu'il y a 2^m mots différents de longueur m composés de 0 et de 1 (la preuve se fait avec une simple récurrence). Un tableau à n variables est déterminé par le contenu de ses 2^n cases, il y en a donc 2^{2^n} au total.

Solution 6

(a) C'est la définition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

(b) Une fois fixée une partie de taille k, pour chaque élément on a le choix entre poser une barre ou non. Ceci est équivalent à donner un mot de longueur k composé de 0 et de 1 (0 pour une barre et 1 pour pas de barre, par exemple). Il y a donc 2^k façons différentes de poser des barres.

(c) Des deux points précédents, on déduit immédiatement qu'il y a $\binom{n}{k}2^k$ clauses conjonctives différentes de longueur k.

Solution 7 Il suffit d'instancier le théorème binomial

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

avec $a = 2$ et $b = 1$.

Solution 8 Il est connu que si A est un ensemble fini de cardinalité m, son ensemble des parties $\mathcal{P}(A)$ a cardinalité 2^m. Ceci peut être vu en associant une chaîne binaire de longueur m à chaque sous-ensemble de A : à chaque élément de A on fait correspondre 1 si l'élément est dans le sous-ensemble et 0 sinon.

Solution 9

(a) De la question 6 on sait qu'il y a $\binom{n}{k}2^k$ clauses conjonctives de longueur k et de la question 7 on déduit qu'il y a au total 3^n clauses conjonctives. Grâce à la question 8 on conclut qu'il y a au total 2^{3^n} clauses disjonctives.

(b) On a démontré dans la question 5 qu'il y a au total 2^{2^n} tableaux de Karnaugh différents, donc moins que les clauses disjonctives (excepté pour $n = 0$). Mais à toute clause disjonctive correspond le tableau de Karnaugh donné par sa table de vérité, donc nécessairement cette correspondance est surjective mais pas injective. Il y a donc bien des tableaux de Karnaugh qui correspondent à plusieurs formules différentes (ce qu'on savait déjà très bien. . .il suffit de voir la question 3).

(c) Comme on l'a dit ci-dessus, à chaque formule correspond le tableau de Karnaugh de sa table de vérité. Puisque cette table de vérité est unique, le tableau l'est aussi.