

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Donner un exemple de bijection entre les ensembles suivants

- (a) L’ensemble $A = \{a, b, c, d\}$ et l’ensemble $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
- (b) L’ensemble des entiers naturels et l’ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2.
- (c) (*) L’ensemble \mathbb{N} des nombres naturels et l’ensemble de tous les mots s’écrivant avec les lettres a et b (y compris les mots qui n’ont pas de sens, par ex. : $a, aab, bbba, \dots$).

Question 2

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

- (a) Le cosinus, $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) La fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2^n$,
- (c) La valeur absolue, $|\cdot| : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

Question 3

Soit A l’ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- (a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$,
- (b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$,
- (c) $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 4

Lesquelles des relations suivantes sont des relations d’équivalence ? Pour chaque relation d’équivalence dire combien de classes d’équivalence elle contient et les décrire.

- (a) La relation sur les mots de la langue française constituée des paires (x, y) telles que x et y commencent par la même lettre. Par ex. : (**oiseau**, **ours**).
- (b) La relation sur les mots de la langue française constituée des paires (x, y) telles que x et y contiennent une même lettre. Par ex. : (**photo**, **cache**).

Question 5

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^n (5k - 3) = \frac{1}{2}(n + 1)(5n - 6)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 6

Donner une définition récursive de la fonction

$$f(n) = \underbrace{(11 \cdots 1)}_{n \text{ fois}}_3.$$

Solutions

Solution 1

- (a) La fonction qui associe $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto 2, d \mapsto 3$ est bien une bijection.
- (b) La fonction $f(n) = n + 2$ est bien une bijection de \mathbb{N} vers $\mathbb{N}_{\geq 2}$.
- (c) Il suffit de trouver une façon d’énumérer tous les mots de deux lettres possibles dans un ordre quelconque. L’ordre alphabétique classique n’est pas le bon choix (car il y a une infinité de mots commençant par a), mais nous pouvons, par exemple, les ordonner par longueur, et ensuite alphabétiquement :

$0 \mapsto a$	$4 \mapsto ba$
$1 \mapsto b$	$5 \mapsto bb$
$2 \mapsto aa$	$6 \mapsto aaa$
$3 \mapsto ab$	$7 \mapsto aab$
\vdots	

On remarque que si on remplace a par 0 et b par 1, et on ajoute un 1 à gauche, on obtient la bijection

$0 \mapsto 10$	$4 \mapsto 110$
$1 \mapsto 11$	$5 \mapsto 111$
$2 \mapsto 100$	$6 \mapsto 1000$
$3 \mapsto 101$	$7 \mapsto 1001$
\vdots	

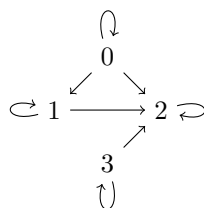
En lisant les nombres de droite en base deux, on s’aperçoit que cette bijection est à nouveau $f(n) = n + 2$.

Solution 2

- (a) Le cosinus n’est ni injectif, ni surjectif en tant que fonction sur les réels. En effet, pour tout x on a $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, ce qui contredit l’injectivité. En plus, il ne prend que des valeurs comprises entre -1 et 1 , ce qui contredit la surjectivité.
- (b) La fonction 2^n est bien injective sur les entiers, en effet, si $2^n = 2^m$, alors nécessairement $n = m$ en prenant le logarithme à gauche et à droite. Elle n’est pas surjective, en effet 3 n’a pas d’antécédent.
- (c) La valeur absolue n’est pas injective sur les entiers relatifs, en effet $|-x| = |x|$ pour tout x . Elle est surjective si on restreint son codomaine aux entiers naturels, comme c’est le cas dans la question. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre soit n , soit $-n$ comme antécédent.

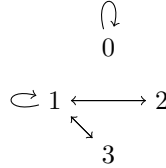
Solution 3

- (a) Le graphe de la relation \mathbb{R} est



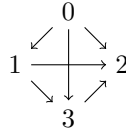
Elle est réflexive, transitive (il y a un chemin $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, et il y a aussi le chemin $0 \rightarrow 2$), antisymétrique (il n’y a pas de doubles flèches autres que les flèches réflexives), et elle n’est pas symétrique (par exemple, il y a $(0, 2)$, mais pas $(2, 0)$).

(b) Le graphe de la relation \mathcal{S} est



Elle est symétrique (que des doubles flèches). Elle est ni réflexive (pas de $(2, 2)$ ni de $(3, 3)$), ni antisymétrique (on a $(1, 2)$ et $(2, 1)$, mais $1 \neq 2$), ni transitive (par exemple on a $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$, mais pas $2 \rightarrow 2$).

(c) Le graphe de la relation \mathcal{T} est



Elle n’est pas réflexive, ni symétrique. Il est facile de voir qu’elle est antisymétrique. Elle est aussi transitive, quoi que la vérification soit plus longue ; une façon synthétique de le voir, c’est de se rendre compte qu’il s’agit du diagramme de la relation d’ordre stricte $0 < 1 < 3 < 2$.

Solution 4

- (a) Cette relation est une équivalence, en effet elle est réflexive, symétrique et transitive. Il y a 26 classes d’équivalence correspondantes aux 26 lettres de l’alphabet, chaque classe est composée de tous les mots commençant par une lettre donnée.
- (b) Cette relation est réflexive et symétrique, mais elle n’est pas transitive (en effet, « chat » est en relation avec « bas », qui est en relation avec « bon », mais le premier n’est pas en relation avec le dernier). Elle n’est donc pas une relation d’équivalence.

Solution 5 On procède par induction. Le cas de base est immédiat. Pour la récurrence on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} (5k - 3) = 5n + 2 + \sum_{k=0}^n (5k - 3) = 5n + 2 + \frac{5}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 3 = \frac{5}{2}n^2 + \frac{9}{2}n - 1 = \frac{1}{2}(n + 2)(5n - 1).$$

Solution 6 On sait que par définition

$$f(n) = \underbrace{(11 \dots 1)}_{n \text{ fois}}_3 = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{3^n - 1}{2}.$$

De la deuxième égalité on déduit immédiatement

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f(n) &= f(n - 1) + 3^n. \end{aligned}$$

Une autre définition possible est obtenue en observant que

$$\underbrace{(11 \dots 1)}_{n \text{ fois}}_3 = \underbrace{(11 \dots 1)}_{n-1 \text{ fois}}_3 \times (10)_3 + 1,$$

d’où on déduit immédiatement

$$f(n) = 3f(n - 1) + 1.$$