

Ne soyez pas avares de mots : détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Développer le calcul suivant en base 5 :

$$11 \cdot (10041 - 4111).$$

Question 2

Effectuer les conversions suivantes

(a) $(13B)_{16}$ en base 2.

(b) $(725)_{10}$ en base 3.

Question 3

Calculer

— $\log_2 64^3$;

— $2^{\log_2 28}$;

— $\log_3 25$, sachant que $\log_5 3 = 1.46 \dots$

Question 4

Prouver que

$$p \rightarrow (p \rightarrow p) \models p \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow p)).$$

Question 5

En utilisant les règles de la déduction naturelle (voir annexe au verso), écrire la preuve formelle de

$$\vdash (q \wedge r) \rightarrow r.$$

Question 6

Mettre la formule suivante en forme normale prénexe

$$\neg \forall y. \left((\exists x. Q(x, y)) \rightarrow (\forall x. R(x, y)) \right).$$

Question 7

En utilisant exclusivement les constantes $0, 1, 2, \dots$ et les symboles $+$ et $=$, et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l’affirmation « Tout nombre a un opposé ».

Annexe : règles de la déduction naturelle

Hypothèse	$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} H$
Tiers exclus	$\frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg \phi} T$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} W$
Élimination du faux	$\frac{\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi}{\Gamma \vdash \phi} F$
Introduction du <i>et</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} I_{\wedge}$
Élimination du <i>et</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} L_{\wedge} \quad \frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} R_{\wedge}$
Introduction du <i>ou</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} L_{\vee} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} R_{\vee}$
Élimination du <i>ou</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \chi \quad \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Gamma \vdash \chi} E_{\vee}$
Modus ponens	$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} M$
Déduction	$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi} D$