Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Deux joueurs A et B mettent en jeu 3 pièces d'un euro chacun. Il lancent toutes les pièces : le joueur A récolte les piles, le joueur B les faces.

(a) Des 2^6 tirages possibles, combien font gagner exactement 4 euros à A ?

(b) Dans combien de tirages A gagne plus que ce qu'il a misé ?

Question 2

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

(a) La fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n, m) = mn$,

(b) Le logarithme $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

(c) La fonction $\epsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui associe à tout entier son nombre de diviseurs premiers (par ex.: $\epsilon(2) = 1, \epsilon(30) = 3$).

Question 3

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 2)\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 4

On considère la relation $\blacktriangle$ sur les entiers définie par

$$a \blacktriangle b \quad \text{ssi} \quad \text{pgcd}(a, b) > 1.$$

(a) La relation $\blacktriangle$ est-elle une relation d'équivalence ?

(b) Si oui, décrire la classe d'équivalence de 1. Sinon, exhiber un contre-exemple.

Question 5

Calculer le résultat des expressions suivantes modulo 13 :

(a) $5 + 13 \cdot 10$,

(b) $3 \cdot (6 + 20)$,

(c) $264 \cdot 1311$,

(d) $4 - 23$,

(e) $12 \cdot 10$

Question 6

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

(c) Calculer la décomposition en cycles (disjoints) de $(4\ 3) \circ (1\ 2) \circ (5\ 3) \circ (1\ 2)$ (**N.B :** on a utilisé la notation cyclique pour écrire les permutations).