Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h30. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le produit AB.

(b) Calculer le déterminant de A, B et AB.

Question 2

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice A, est-elle une matrice de permutation ?

(b) Écrire la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ correspondant à A.

(c) Donner l'inverse de A (**suggestion :** il n'est pas nécessaire d'utiliser les formules de Cramer ou l'algorithme de Gauss-Jordan).

(d) Récrivez A comme un produit de matrices correspondant à sa décomposition en cycles.

Question 3

Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}.$$

Question 4

Calculer une solution du système linéaire suivant par la méthode de Cramer

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$