

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^n (k^2 + 7k + 5) = \frac{1}{3} (n^2 + 11n + 15)(n + 1)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 2

On rappelle que la composée $g \circ f : A \rightarrow C$ de deux fonctions $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ est la fonction qui à x associe $g(f(x))$.

- Donner un exemple avec f pas surjective, g pas injective, et $g \circ f$ bijective.
- Donner un exemple avec f pas surjective, g pas injective, et $g \circ f$ bijective.

Question 3

Soit A l’ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$,
- $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$,
- $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 4

On considère la relation \blacktriangle sur les paires d’entiers définie par

$$(a, b) \blacktriangle (a, b) \quad \text{ssi} \quad a = a$$

- La relation \blacktriangle est-elle une relation d’équivalence? Si oui, décrire la classe d’équivalence de $(0, 3)$. Sinon, exhiber un contre-exemple.
- La relation \blacktriangle est-elle une relation d’ordre?

Question 5

Calculer le résultat des expressions suivantes modulo 11 :

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|------------------------|
| (a) $0 + 11 \cdot 10$, | (b) $3 \cdot (1 + 22)$, | (c) $224 \cdot 1111$, |
| (d) $4 - 22$, | (e) $10 \cdot 10$. | |

Question 6

- Calculer la table de multiplication de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. S’agit-il d’un corps?
- Calculer $3^8 \pmod{5}$.