

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations.

**IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.**

Durée : 1h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

**Question 1**

Montrer par induction que  $\sum_{k=0}^n (k^2 + 7k + 5) = \frac{1}{3} (n^2 + 11n + 15)(n + 1)$  pour tout  $n \geq 0$ .

**Question 2**

On rappelle que la composée  $g \circ f : A \rightarrow C$  de deux fonctions  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  est la fonction qui à  $x$  associe  $g(f(x))$ .

- Donner un exemple avec  $f$  pas surjective,  $g$  pas injective, et  $g \circ f$  bijective.
- Donner un exemple avec  $f$  pas surjective,  $g$  pas injective, et  $g \circ f$  bijective.

**Question 3**

Soit  $A$  l’ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Pour chacune des relations binaires sur  $A$  ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de  $A \times A$ ), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ ,
- $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$ ,
- $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 0), (3, 2)\}$ .

**Suggestion :** dessinez les diagrammes des relations.

**Question 4**

On considère la relation  $\blacktriangle$  sur les paires d’entiers définie par

$$(a, b) \blacktriangle (a, b) \quad \text{ssi} \quad a = a$$

- La relation  $\blacktriangle$  est-elle une relation d’équivalence? Si oui, décrire la classe d’équivalence de  $(0, 3)$ . Sinon, exhiber un contre-exemple.
- La relation  $\blacktriangle$  est-elle une relation d’ordre?

**Question 5**

Calculer le résultat des expressions suivantes modulo 11 :

- |                         |                          |                        |
|-------------------------|--------------------------|------------------------|
| (a) $0 + 11 \cdot 10$ , | (b) $3 \cdot (1 + 22)$ , | (c) $224 \cdot 1111$ , |
| (d) $4 - 22$ ,          | (e) $10 \cdot 10$ .      |                        |

**Question 6**

- Calculer la table de multiplication de  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . S’agit-il d’un corps?
- Calculer  $3^8 \pmod{5}$ .