

IN310 - Mathématiques pour l'informatique
2^{ième} contrôle continu 2017-2018

Durée : 1h15.

Les documents sont autorisés. Pas de calculatrices. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Question 1

Montrer par induction que $9^n - 5^n$ est divisible par 4 pour tout $n \geq 1$.

Question 2

Soit $f : A \rightarrow B$ la fonction définie comme $f(x) = |x|$ pour tout $x \in A$. Donner un domaine de départ A et un domaine d'arrivée B de façon que

- (a) f soit surjective mais pas injective.
- (b) f soit injective mais pas surjective.

Question 3

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- (a) $\mathcal{R} = \{(0, 3), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$,
- (b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,
- (c) $\mathcal{T} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Question 4

On considère la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} définie par

$$x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- (b) Donner la classe d'équivalence de 0.5.

Question 5

Donner le résultat des calculs ci-dessous. La réponse doit être un entier compris entre 0 et $n - 1$, où n est le module.

- (a) $13(6 + 16) \pmod{14}$ (b) $33 \cdot 17 \pmod{16}$ (c) $(16 + 20) \cdot 8 \pmod{18}$ (d) $549 \cdot 33 \pmod{27}$
- (e) $547 \cdot 2714 \pmod{27}$

Question 6

- (a) Donner la liste des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.
- (b) L'élément $5 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est-il inversible? Si oui, quel est son inverse?