Sujet 1

IN310 - Mathématiques pour l'informatique

2^{ieme} contrôle continu 2018-2019

Durée : 1h10.

Les documents sont autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Question 1

Montrer par induction que $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 2

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives. Justifier votre réponse.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie comme $f(x) = x + |x|$.

(b) $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie comme $g(n, m) = n + m$.

Question 3

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0, 3), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 3)\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Question 4

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ si et seulement si } a \leq c \text{ et } b \geq d.$$

(a) Dire si la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive ou anti-symétrique.

(b) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre ?

Justifier vos réponses.

Question 5

On considère la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{N}$ définie par

$$a\mathcal{R}b \text{ si et seulement si } \mathrm{pgcd}(a, b) \neq 1.$$

La relation $\mathcal{R}$ est-elle une réflexive, symétrique, transitive ? S'agit t'il d'une relation d'équivalence ? Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

Question 6

Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $C = \{b, c\}$ et on définit une fonction $f : X \to Y$ comme $f(1) = a, f(2) = a, f(3) = c$ et $f(4) = b$.

Donner $f(A)$ et $f^{-1}(C)$.