Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Poser la multiplication suivante en base 5 :

$$1102 \times 12.$$

Question 2

Mettre la formule suivante en forme normale prénexe

$$\neg\Big(\neg\forall y.\Big(\big(\exists.x.A(x,y)\big) \to \big(\forall x.B(x,y)\big)\Big)\Big)$$

Question 3

En utilisant exclusivement les symboles $+, -, \times, =, \leq$, les constantes $0, 1, 2, \ldots$ et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l'affirmation « il existe des nombres pairs et divisibles par 11 ».

Question 4

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^{n}(6\,k+3) = 3\,(n+1)^2$ pour tout $n \geq 0$.

Question 5

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

(a) La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = x/2$,

(b) La fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x^2$,

(c) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x$.

Question 6

On considère des relations binaires sur l'ensemble $A = \{1, \ldots, 7\}$.

(a) Écrire les relations suivantes comme des sous-ensembles de $A \times A$.
- $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y$ est divisible par 3 ;
- $x\mathcal{S}y$ si et seulement si $x - y \leq 2$;
- $x\mathcal{T}y$ si et seulement si x est un multiple de y ;

(b) Lesquelles de ces relations sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives ?

(c) Y a-t-il des relations d'équivalence ? Donner la classe d'équivalence de 1 ?

Question 7

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

Question 8

n couples hétérosexuels sont invités à un mariage. Les mariés veulent que les couples soient assis à table vis-à-vis, mais ils ne veulent imposer aucune autre contrainte. Par exemple, les configurations ci-dessous sont admissibles (et différentes) :

$$\begin{array}{cc} \text{Amandine} & \text{Blandine} \\ \hline \text{Armand} & \text{Baptiste} \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} \text{Amandine} & \text{Baptiste} \\ \hline \text{Armand} & \text{Blandine} \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} \text{Baptiste} & \text{Armand} \\ \hline \text{Blandine} & \text{Amandine} \end{array}$$

mais pas celles-ci :

$$\begin{array}{cc} \text{Amandine} & \text{Blandine} \\ \hline \text{Baptiste} & \text{Armand} \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} \text{Amandine} & \text{Armand} \\ \hline \text{Blandine} & \text{Baptiste} \end{array}$$

(la ligne du milieu représente la table, et on adopte la convention d'avoir les membres de chaque couple commençant par la même lettre).

(a) Combien de dispositions différentes y a-t-il pour $n = 1, 2, 3$?

(b) On note $D(n)$ le nombre de dispositions possibles, exprimer $D(n+1)$ en fonction de $D(n)$. Justifier.

(c) Donner une formule close (i.e., non récursive) pour $D(n)$.

Les couples s'assoient au fur et à mesure qu'ils arrivent dans la salle. Par galanterie, l'homme laisse toujours s'asseoir d'abord la femme. Plusieurs couples peuvent arriver à peu près en même temps, auquel cas chaque homme s'assoit après sa propre femme, mais aucune autre contrainte est imposée. Ainsi, les ordres suivants sont valables :

— Amandine, Céline, Christian, Armand, Blandine, Baptiste ;
— Blandine, Amandine, Céline, Armand, Christian, Baptiste ;

mais pas

— Armand, Amandine, Baptiste, Blandine ;
— Amandine, Baptiste, Blandine, Armand.

(d) Combien d'ordres possibles pour $n = 1, 2, 3$?

(e) ($*$) On note $O(n)$ le nombre d'ordres possibles. Exprimer $O(n+1)$ en fonction de $O(n)$. Justifier.

(f) Donner une formule close pour $O(n)$.