

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.

IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.

Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d’ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Développer le calcul suivant en base 4 :

$$31 \cdot (2323 - 2012).$$

Question 2

En utilisant les règles de la déduction naturelle (voir annexe au verso) prouver que

$$\vdash p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q).$$

Question 3

En utilisant exclusivement les symboles $+$, $-$, \times , $=$, \leq , les constantes $0, 1, 2, \dots$ et le calcul des prédicats, écrire en langage logique l’affirmation « 2 est un nombre premier ».

Question 4

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^n (4k - 5) = (2n - 5)(n + 1)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 5

Pour chacune des fonctions suivantes dire si elle est injective et/ou surjective. Donner une justification dans le cas affirmatif, ou un contre-exemple dans le cas négatif.

- (a) La fonction $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(m, n) = m + n$,
- (b) La fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2 - 3n + 2$,
- (c) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

Question 6

On considère la relation \circ sur \mathbb{Q}^* (les rationnels privés de 0) définie par

$$a \circ b \text{ ssi } \frac{a}{b} \text{ est un carré.}$$

Rappel : $9/4$ est un carré car égal à $(3/2)^2$, alors que $7/3$ n’est pas un carré.

- (a) Dire si $1 \circ \frac{1}{49}$, $1 \circ 10$, $\frac{1}{49} \circ 1$, $8 \circ \frac{8}{25}$.
- (b) La relation est-elle réflexive, symétrique, transitive, anti-symétrique? Justifier.
- (c) Décrire la classe d’équivalence de 1.

Question 7

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1} .
- (b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1 , σ_2 , σ_1^{-1} et σ_2^{-1} .

Question 8

Un *sous-mot* d'un mot donné est une suite de lettres apparaissant dans le même ordre que dans le mot d'origine. Par exemple, « prl » et « are » sont des sous-mots de « parole », mais « plr » ne l'est pas.

- (a) Combien de sous-mots a le mot « mot » ?
 (b) Étant donné un mot de n lettres distinctes, combien de sous-mots de m lettres y a-t-il ?
 (c) Étant donné un mot de n lettres distinctes, combien de sous-mots y a-t-il ?

Annexe : règles de la déduction naturelle

Hypothèse	$\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi} H$	Tiers exclus	$\frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg \phi} T$
Affaiblissement	$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi} W$	Élimination du faux	$\frac{\Gamma \vdash \psi \wedge \neg \psi}{\Gamma \vdash \phi} F$
Introduction du <i>et</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} I_{\wedge}$		
Élimination du <i>et</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} L_{\wedge}$	$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} R_{\wedge}$	
Introduction du <i>ou</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} L_{\vee}$	$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} R_{\vee}$	
Élimination du <i>ou</i>	$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \chi \quad \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Gamma \vdash \chi} E_{\vee}$		
Modus ponens	$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} M$	Déduction	$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi} D$