

Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.

**IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.**

Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculatrices. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

### Question 1

Poser la multiplication suivante en base 5 :

$$3120 \times 12.$$

### Question 2

Mettre la formule suivante en forme normale préfixe

$$(\neg \exists y. \exists x. P(x, y)) \rightarrow (\neg \forall x. Q(x, y)).$$

### Question 3

Montrer par induction que  $\sum_{k=0}^n (7k - 10) = \frac{1}{2} (7n - 20)(n + 1)$  pour tout  $n \geq 0$ .

### Question 4

Le reversi se joue sur un plateau  $8 \times 8$ . Les deux joueurs (blanc et noir) disposent chacun à son tour un pion sur le plateau. Dans les questions qui suivent nous allons ignorer les vraies règles du reversi, et nous allons nous intéresser seulement aux façons de placer les pions blancs et noirs sur le plateau.

- On vous affirme qu'il y a  $n$  pions blancs sur le plateau et aucun pion noir. Combien de dispositions sont possibles ?
- On vous affirme qu'il y a  $n$  pions blancs et  $m$  pions noirs. Combien de dispositions sont possibles ?

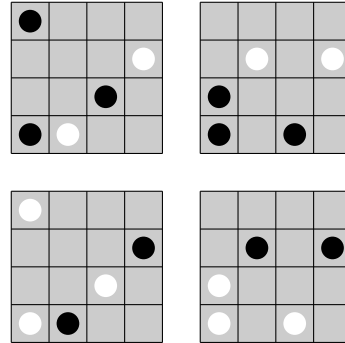


FIGURE 1 – Quatre dispositions différentes avec 5 pions sur un plateau simplifié.

### Question 5

Soit  $A$  l'ensemble  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Pour chacune des relations binaires sur  $A$  ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de  $A \times A$ ), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

- $\mathcal{R} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ ,
- $\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$ ,
- $\mathcal{T} = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ .

**Suggestion :** dessinez les diagrammes des relations.

### Question 6

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Calculer  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  et  $\sigma_1^{-1}$ .
- Calculer les décompositions en cycles de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_1^{-1}$  et  $\sigma_2^{-1}$ .
- Calculer la décomposition en cycles (disjoints) de  $(3\ 6) \circ (4\ 1) \circ (5\ 6) \circ (4\ 1)$  (**N.B :** on a utilisé la notation cyclique pour écrire les permutations).

**Question 7**

Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

**Question 8**

Calculer une solution du système linéaire suivant par la méthode de Cramer

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$