Détaillez vos réponses, prouvez vos affirmations. Les étoiles marquent les questions difficiles.
IMPORTANT : Pensez à noter le numéro du sujet sur votre copie.
Durée : 2h. Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

Question 1

Poser la multiplication suivante en base 5 :

$$3023 \times 12.$$

Question 2

Mettre la formule suivante en forme normale prénexe

$$\neg\Big(\big(\neg\forall y.\exists x.Q(x,y)\big) \wedge \forall x.R(x)\Big).$$

Question 3

Montrer par induction que $\sum_{k=0}^{n}(2\,k+9) = (n+9)(n+1)$ pour tout $n \geq 0$.

Question 4

Calculer le résultat des expressions suivantes modulo 13 :

(a) $5 + 13 \cdot 10$,

(b) $3 \cdot (6 + 20)$,

(c) $264 \cdot 1311$,

(d) $4 - 23$,

(e) $12 \cdot 10$

Question 5

Soit A l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour chacune des relations binaires sur A ci-dessous (exprimées comme des sous-ensembles de $A \times A$), dire si elle est réflexive, symétrique, anti-symétrique, transitive.

(a) $\mathcal{R} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,0),(3,3)\}$,

(c) $\mathcal{T} = \{(0,1),(0,3),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.

Suggestion : dessinez les diagrammes des relations.

Question 6

Soient

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$ et σ_1^{-1}.

(b) Calculer les décompositions en cycles de σ_1, σ_2, σ_1^{-1} et σ_2^{-1}.

(c) Calculer la décomposition en cycles (disjoints) de $(5\ 6) \circ (1\ 3) \circ (5\ 6) \circ (4\ 3)$ (**N.B :** on a utilisé la notation cyclique pour écrire les permutations).

Question 7

Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Question 8

Calculer une solution du système linéaire suivant par la méthode de Cramer

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$