Exercice 1

Considérons le plan de métro de Paris. Soit M l'ensemble des stations de métro.

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $M \times M$ suivante définie : Soit x et y deux stations de métro. on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont sur la même ligne. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$?
2. Soit $\mathcal{F}$ la relation sur $M \times M$ suivante définie : Soit x et y deux stations de métro. on a $x\mathcal{F}y$ si et seulement si un passagé peut aller de x vers y en métro. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{F}$?

Exercice 2

Nous considérons des pièces de monaies de 1, 2, 5 centimes. Notons $N(x)$, le nombre minimun de pièces pour obtenir x centimes

1. Quelle est la valeur de $N(0)$, $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$, $N(5)$?
2. Trouver la relation sous forme mathématique de $N(x)$ en fonction de valeurs $N(w)$ avec $w < x$.
3. Prouver cette formule par induction/récurrence sur x.

Exercice 3

Considérons la suite Z telle que $Z(1) = 1$ *et* $Z(n) = Z(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + Z(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \quad Z(n) \leq cn - b$$

en fixant les variables c et b.

Exercice 4

Soit X, Y deux ensembles finis. Soit $f : X \to Y$ une application Montrer que

1. si f est surjective et si B est un sous ensemble de Y, alors
$$f(f^{-1}(B)) = B.$$
2. si f est injective et si A est un sous ensemble de X, alors
$$f^{-1}(f(A)) = A.$$

Supposons que X, Y sont deux ensembles finis de même cardinalité. Montrer que

1. si f est injective alors f est surjective.
2. si f est surjective alors f est injective.

Exercice 5

Existe-il

1. une application non-surjective et non-injective
2. une application non-surjective et injective
3. une application surjective et non-injective

Exercice 6

Soit k un entier. S_k l'ensemble des entiers compris entre 0 et $2^k - 1$.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence de $S_k \times S_k$ définit de la façon suivante : on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si le nombre de bits de la représentation binaire x est égale au nombre de bits de la représentation binaire y.

– Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.