Documents autorisés. Pas de calculettes. Pas d'ordinateur. Pas de téléphone.

IMPORTANT : Notez le numéro de sujet sur votre copie.

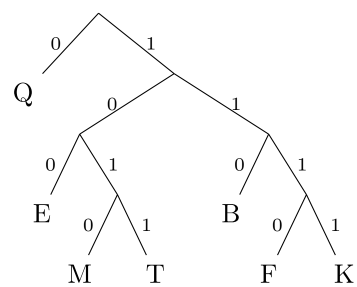
Les étoiles marquent les exercices difficiles.

Question 1

(a) Construisez l'arbre d'un code de Huffman pour l'alphabet suivant, en tenant compte des fréquences d'apparition données :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15.8%	0.7%	3.8%	1.0%	10.9%	1.3%	11.1%	13.9%	12.1%	12.5%	5.2%	11.6%

(b) Décodez le mot 10101010101111110 à l'aide du code préfixe défini par l'arbre suivant :



Question 2

Considérez le texte chiffré suivant :

VPAAXPTHIDBCXHSXKXHPXCEPGITHIGTHFJPGJBJCPBXCRDAJCI
QTAVPTPAXPBPFJXIPCXITGIXPBFJXXEHDGJBAXCVJPRTAIPTCD
HIGPVPAAXPEETAAPCIJGWXDBCTHAXCVJPXCHIXIJIXHATVXQJH
XCITGHTSXUUTGJCIVPAADHPQPFJXIPCXHVPGJBCPUAJBTCPQTA
VXHBPIGDCPTIHTFJPCPSXKXSXI

(a) Son indice de coïncidence vaut 0.0784321403398857. Que peut-on en déduire ?

(b) ($*$) Décryptez une portion du texte au choix.

Question 3

On veut transmettre un message sur un canal bruité. Pour cela, on commence par encoder les lettres de l'alphabet sur 5 bits par l'écriture en base 2 de leur position : $A = 00001$, $B = 00010$, etc.

(a) Encodez le message « LUNE »

Ensuite, pour permettre la correction d'erreurs, on applique lettre par lettre le code linéaire de paramètres $[9, 5, 3]$ défini par la matrice de parité

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculez la matrice génératrice du code.

(c) ($*$) Exhibez deux mots de code à distance 3 l'un de l'autre.

(d) Combien d'erreurs au plus peut corriger ce code ?

(e) Encodez le message de la question (a).

(f) Décodez le message « 110100010 001011010 101011101 100101111 ».

Question 4

Alice et Bob veulent convenir d'un secret en utilisant le protocole d'échange de clef de Diffie-Hellman. Ils se mettent d'accord pour le corps $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ et pour le générateur $g = 18$. Alice choisit la clef secrète $a = 18$ et Bob $b = 25$.

(a) Calculez les clefs publiques de Alice et Bob.

(b) Calculez la clef partagée.

Utilisez l'algorithme d'exponentiation binaire pour répondre aux deux questions. Ne donnez pas seulement les résultats finaux : développez en détail les étapes du calcul. Pour vous aider dans le calcul, la table de multiplication de $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ est donnée en annexe.

(c) Calculez $17^{401} \bmod 29$.

Question 5

(a) Calculez l'inverse de 43 modulo 72.

On fixe le module RSA $N = 91 = 7 \cdot 13$.

(b) Calculez $\phi(N)$.

(c) Générez une clef publique e et une clef privée d non triviales (i.e., pas égales à 1 ou $\phi(N) - 1$), telles que

$$m^{ed} = m \mod N$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	2	5	8	11	14	17	20	23	26
4	0	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25
5	0	5	10	15	20	25	1	6	11	16	21	26	2	7	12	17	22	27	3	8	13	18	23	28	4	9	14	19	24
6	0	6	12	18	24	1	7	13	19	25	2	8	14	20	26	3	9	15	21	27	4	10	16	22	28	5	11	17	23
7	0	7	14	21	28	6	13	20	27	5	12	19	26	4	11	18	25	3	10	17	24	2	9	16	23	1	8	15	22
8	0	8	16	24	3	11	19	27	6	14	22	1	9	17	25	4	12	20	28	7	15	23	2	10	18	26	5	13	21
9	0	9	18	27	7	16	25	5	14	23	3	12	21	1	10	19	28	8	17	26	6	15	24	4	13	22	2	11	20
10	0	10	20	1	11	21	2	12	22	3	13	23	4	14	24	5	15	25	6	16	26	7	17	27	8	18	28	9	19
11	0	11	22	4	15	26	8	19	1	12	23	5	16	27	9	20	2	13	24	6	17	28	10	21	3	14	25	7	18
12	0	12	24	7	19	2	14	26	9	21	4	16	28	11	23	6	18	1	13	25	8	20	3	15	27	10	22	5	17
13	0	13	26	10	23	7	20	4	17	1	14	27	11	24	8	21	5	18	2	15	28	12	25	9	22	6	19	3	16
14	0	14	28	13	27	12	26	11	25	10	24	9	23	8	22	7	21	6	20	5	19	4	18	3	17	2	16	1	15
15	0	15	1	16	2	17	3	18	4	19	5	20	6	21	7	22	8	23	9	24	10	25	11	26	12	27	13	28	14
16	0	16	3	19	6	22	9	25	12	28	15	2	18	5	21	8	24	11	27	14	1	17	4	20	7	23	10	26	13
17	0	17	5	22	10	27	15	3	20	8	25	13	1	18	6	23	11	28	16	4	21	9	26	14	2	19	7	24	12
18	0	18	7	25	14	3	21	10	28	17	6	24	13	2	20	9	27	16	5	23	12	1	19	8	26	15	4	22	11
19	0	19	9	28	18	8	27	17	7	26	16	6	25	15	5	24	14	4	23	13	3	22	12	2	21	11	1	20	10
20	0	20	11	2	22	13	4	24	15	6	26	17	8	28	19	10	1	21	12	3	23	14	5	25	16	7	27	18	9
21	0	21	13	5	26	18	10	2	23	15	7	28	20	12	4	25	17	9	1	22	14	6	27	19	11	3	24	16	8
22	0	22	15	8	1	23	16	9	2	24	17	10	3	25	18	11	4	26	19	12	5	27	20	13	6	28	21	14	7
23	0	23	17	11	5	28	22	16	10	4	27	21	15	9	3	26	20	14	8	2	25	19	13	7	1	24	18	12	6
24	0	24	19	14	9	4	28	23	18	13	8	3	27	22	17	12	7	2	26	21	16	11	6	1	25	20	15	10	5
25	0	25	21	17	13	9	5	1	26	22	18	14	10	6	2	27	23	19	15	11	7	3	28	24	20	16	12	8	4
26	0	26	23	20	17	14	11	8	5	2	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1	27	24	21	18	15	12	9	6	3
27	0	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2
28	0	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Table de multiplication de $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$

Solutions

Solution 1

1. Trop fatiguant à générer automatiquement. Voir cours.
2. Le parcours de l'arbre binaire donne le découpage suivant pour le mot :

   1010, 1010, 1011, 1111, 0

   ce qui correspond aux symboles

   2, 2, 3, 6, 0

Solution 2

(a) L'indice de coïncidence est aussi élevé que celui d'une langue courante. Il y a des fortes chances que le texte ait été chiffré avec un cryptosystème qui ne cache pas les répétitions des lettres, par exemple un chiffre monoalphabétique.

(b) Le prof n'est pas fou, on va donc supposer que le chiffre monoalphabétique employé est le chiffre de César. Les lettres les plus fréquentes sont le P (30 occurrences) et le X (28 occurrences). Manque de pot, aucune de ces lettres correspond au E, en effet les lettres le plus fréquentes du texte sont le A et le I. En décryptant on découvre qu'il s'agit d'un texte latin :

GALLIAESTOMNISDIVISAINPARTESTRESQUARUMUNAMINCOLUNT
BELGAEALIAMAQUITANITERTIAMQUIIPSORUMLINGUACELTAENO
STRAGALLIAPPELLANTURHIOMNESLINGUAINSTITUTISLEGIBUS
INTERSEDIFFERUNTGALLOSABAQUITANISGARUMNAFLUMENABEL
GISMATRONAETSEQUANADIVIDIT

Solution 3

(a) En appliquant lettre par lettre le codage, on a

01100 10101 01110 00101.

(b) La matrice génératrice du code est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Le mot 000000000 appartient certainement au code, il suffit donc de trouver un autre mot contenant trois 1. Nous cherchons alors une combinaison de colonnes de G donnant un tel mot. En prenant, par exemple, la somme des trois premières colonnes on obtient

$$100000011 + 010001110 + 001001101 = 111000000.$$

Donc 000000000 et 111000000 sont deux mots de code à distance 3.

(d) La distance minimale du code est 3, donc le code peut corriger au plus $(3 - 1)/2 = 1$ erreur.

(e) Pour encoder le message précédent, il suffit de le multiplier lettre par lettre par la matrice G. Cela donne

011000011 101011001 011101000 001011010.

(f) On commence par calculer les quatre syndromes en multipliant chaque mot par la matrice H, cela nous donne

$$0100, \quad 0000, \quad 0100, \quad 0111.$$

En cherchant l'indice auquel les syndromes apparaissent dans H, on obtient les pattern d'erreur suivants

$$000000100\ 000000000\ 000000100\ 000010000,$$

qui, additionnés aux mots reçus, donnent les mots de code

$$110100110\ 001011010\ 101011001\ 100111111.$$

Il ne reste plus qu'à trouver le message correspondant à chaque mot de code, ce qui se lit dans les cinq premières coordonnées :

$$11010\ 00101\ 10101\ 10011.$$

Enfin, en inversant le codage du premier point, on obtient le message « ZEUS ».

Solution 4

(a) Les clefs publiques de Alice et Bob sont, respectivement, g^a et g^b. On commence par convertir les exposants en base 2 :

$$a = (10010)_2, \quad b = (11001)_2.$$

Sur la diagonale de la table de multiplication, on trouve les carrés successifs de g modulo 29 :

$$18^2 = 5, \quad 5^2 = 25, \quad 25^2 = 16, \quad 16^2 = 24.$$

Ensuite on multiplie ensemble les éléments qui correspondent aux 1 dans l'expansion binaire de a et b :

$$g^a = 5 \cdot 24 = 4, \quad g^b = 18 \cdot 16 \cdot 24 = 10,$$

(b) La clef partagée est $(g^a)^b = (g^b)^a = g^{ab}$. Pour avoir le moins d'opérations à calculer, on utilise le petit théorème de Fermat : on sait que

$$g^{ab} = g^{ab \bmod p-1} = g^{450 \bmod 28} = g^2;$$

on écrit 2 en base 2, ce qui donne $(10)_2$; et on conclut

$$g^{ab} = 5.$$

(c) On sait que l'ordre de tout élément de $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ est au plus 28, on commence donc par calculer l'ordre de 17. Grâce à la table de multiplication on trouve rapidement que $17^4 = 1$, d'où on déduit

$$17^{401} = (17^4)^{100} \cdot 17^1 = 1 \cdot 17^1 = 17.$$

Solution 5

(a) On sait que $72 = 9 \cdot 8$, le théorème des restes chinois nous permet donc de calculer l'inversion modulo 8 et modulo 9 et enfin de remonter le résultat modulo 72.

On commence par la réduction

$$43 = 3 \bmod 8, \qquad 43 = 7 \bmod 9.$$

L'inversion est maintenant immédiate et peut même être calculée de tête :

$$3^{-1} = 3 \bmod 8, \qquad 7^{-1} = 4 \bmod 9.$$

Nous cherchons maintenant un élément $c \in \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ congru à $a = 3$ modulo 8 et à $b = 4$ modulo 9. La relation de Bezout entre 8 et 9 se calcule aussi de tête :

$$(-1) \cdot 8 + 9 = 1,$$

l'élément cherché est donc

$$c = b \cdot (-1) \cdot 8 + a \cdot 9 = -5.$$

(b) On a $\phi(N) = \phi(7 \cdot 13) = (7-1) \cdot (13-1) = 72$.

(c) Pour que $m^{ed} = m$ pour tout m, il faut que

$$ed \equiv 1 \mod \phi(N).$$

On peut alors prendre les éléments calculés au premier point : $e = 43$ et $d = -5$, par exemple.