

**Question 11 :** Le magma  $(Z, -)$  est-il un groupe?

Pour tout entier  $n \geq 2$ , soit  $T_n$  le sous-ensemble de permutations de  $S_n$  contenant toutes les transpositions de  $S_n$  et la permutation identité. La transposition entre  $i$  et  $j$ , avec  $1 \leq i < j \leq n$ , est notée  $t_{i,j}$ ; on note  $t_{0,0}$  la permutation identité.

Soient  $t_{i,j}$  et  $t_{i',j'}$  deux permutations de  $T_n$ . On pose  $\alpha = ((i + i') \bmod (n)) + 1$  et  $\beta = ((j + j') \bmod (n)) + 1$ . On définit l'opération binaire  $++$  par  $t_{i,j} ++ t_{i',j'} = t_{a,b}$  avec

- Si  $\alpha \neq \beta$  alors  $a = \min(\alpha, \beta)$  et  $b = \max(\alpha, \beta)$ ,
- sinon  $a = b = 0$ .

**Question 12 :** Calculer  $|T_n|$  pour tout  $n \geq 3$ . Ecrire le contenu de  $T_3$ .

**Question 13 :** Considérant  $T_3$ , calculer  $t_{1,2} ++ t_{1,3}$  et  $t_{1,2} ++ t_{2,2}$ . L'opération  $++$  est-elle une loi de composition interne? Admet-elle un élément neutre? Est-elle associative?

**Question 14 :** Soit  $f$  associant à chaque  $t_{i,j} \in T_n$  la permutation  $t_{i',j'} \in T_n$  telle que  $t_{i,j} ++ t_{i',j'} = t_{0,0}$ . Est-ce que  $f$  est une application?

**Question 15 :** Le magma  $(T_n, ++)$  est-il un groupe pour tout  $n \geq 3$ ?

## Examen de mathématiques pour l'informatique

**Durée : 2h00. Tout Document autorisé sauf livres.**

*Les algorithmes pourront être exprimés en langage "libre" de votre choix.*

**Question 1 :** Ecrire  $(35)_7$  en base 4. Réaliser l'opération suivante :  $(22021)_3 : (21)_3$  sans utiliser un passage par la base 10.

*Les variables  $a, b, c, d$  utilisées par la suite sont des variables booléennes.*

**Question 2 :** Ecrire en logique du premier ordre : *Tout entier pair est divisible par 4*. En utilisant la table de vérité de l'implication, montrer que cette proposition est fausse.

**Question 3 :** Montrer (sans utiliser les tables de vérité) que  $(a.b + c).a.b = a.b$  et que  $((a + b).c) + (\overline{a.b}) = a + b$

**Question 4 :** Ecrire sous la forme d'un prédicat logique l'assertion suivante : "Toute nombre étant une puissance de 2 est la somme de deux nombres étant chacun une puissance de 2".

**Question 5 :** En utilisant la propriété de distribution et les tableaux de Carnaugh, simplifier la formule  $F = \overline{a}.(\overline{b}.c.\overline{d}c + b.c.\overline{d}) + a.\overline{b}.c.d + a\overline{b}.c.d$ .

**Question 6 :** Donner la décomposition en cycles de la permutation  $p = 432651$ . Donner la forme canonique de la permutation de  $S_6$  dont le tableau d'inversion est 423110.

**Question 7 :** Quelle est la taille des cycles d'une involution de  $S_n$ , avec  $n \geq 2$ ? Chaque permutation de  $S_3$  peut-elle être obtenu par la composition d'au plus deux Transpositions (justifiez)?

**Question 8 :** La transposition entre  $i$  et  $j$  de  $S_n$ , avec  $n \geq 3$  et  $1 \leq i < j \leq n$ , est notée  $p_{i,j}$ . Quelles conditions doivent remplir deux transpositions  $p_{i,j}$  et  $p_{i',j'}$  pour que leur composition soit une involution?

**Question 9 :** Pour tout  $n \geq 3$ , donner le nombre de permutations de  $S_n$  sans point fixe constituées de deux cycles, avec 1 et  $n$  n'étant pas dans le même cycle.

**Question 10 :** Donner un exemple d'involution qui n'est pas une transposition et qui possède un et un seul point fixe dans  $S_5$ . Donner le nombre d'involutions qui possède un et un seul point fixe de  $S_n$  avec  $n \geq 3$  pair (n.B.: penser à la condition que doit remplir  $n$ ).